SUITES

I. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Retour à l'exemple :
La suite introduite plus haut est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

Méthode : Vérifier si une suite est géométrique.

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 4^{2n-1}$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{2(n+1)-1}}{4^{2n-1}} = \frac{4^{2n+1}}{4^{2n-1}} = 4^2 = 16.$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 16.
(u_n) est une suite géométrique de raison 16.

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = 2(n+1)^3$ est-elle géométrique ?

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{2(1+1)^3}{2(0+1)^3} = 8 \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{2(2+1)^3}{2(1+1)^3} = \frac{27}{8}.$$

La suite (v_n) n'est pas géométrique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :
La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = q \times u_n$.
En calculant les premiers termes :

$u_1 = q \times u_0$

$u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$

$u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$

…

$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} u_0) = q^n \times u_0$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_6 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = q^n \times u_0$.

Ainsi $u_4 = q^4 \times u_0 = 8$ et

$u_6 = q^6 \times u_0 = 512$.

Ainsi : $\dfrac{u_6}{u_4} = \dfrac{q^6 \times u_0}{q^4 \times u_0} = q^2$ et $\dfrac{u_6}{u_4} = \dfrac{512}{8} = 64$ donc $q^2 = 64$.

Ainsi $q = \sqrt{64} = 8$

Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $8^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \dfrac{1}{512}$.

2) Variations

Définitions : Soit une suite numérique (u_n).
- La suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme positif et non nul u_0.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

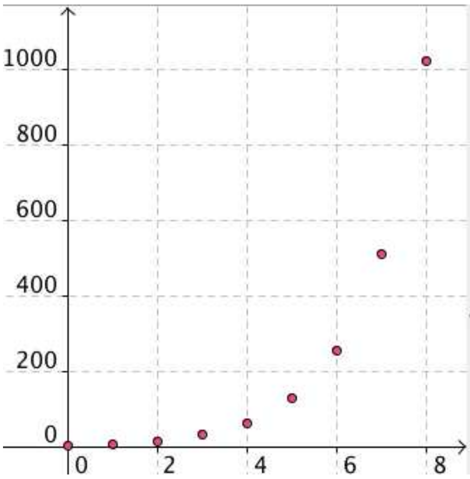
Démonstration:

$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q-1)$.

- Si q > 1 alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$ est croissante car le premier terme est positif et la raison est supérieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	8
4	2	16
5	3	32
6	4	64
7	5	128
8	6	256
9	7	512
10	8	1024
11		

II. Sommes de termes consécutifs

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration :

$S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

$q \times S = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}$

Ainsi :

$S - q \times S = \left(1 + q + q^2 + ... + q^n\right) - \left(q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}\right)$

$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$

$S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$

$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

1) Calculer la somme S suivante : $S = 1+3+3^2+...+3^{13}$

$S = 1+3+3^2+...+3^{13}$

$= \frac{1-3^{14}}{1-3} = 2391484$

2) Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.
Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

On note (u_n) le capital injecté au n-ième mois.
Alors $u_{n+1} = 0,7u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison q = 0,7 et de premier terme $u_0 =$ 20000.
Le total du capital investit à la fin de la première année est :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{11}$

$= u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + ... + u_0 q^{11}$

$= u_0 \left(1 + q + q^2 + ... + q^{11}\right)$

$= u_0 \frac{1-q^{12}}{1-q}$

$= 20000 \frac{1-0,7^{12}}{1-0,7}$

≈ 65744

III. Limites

1) Limite de la suite (q^n) :

q	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n =$	0	1	$+\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

2) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4^n + 3\right)$?

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4^n + 3\right) = +\infty$

3) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$

Exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right)$?

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right) = 5$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right) = 2 \times 5 = 10$

4) Limite d'une suite géométrique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme non nul u_0.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration :
(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme positif non nul u_0 donc $u_n = u_0 \times q^n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0 \times \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3^n - 2^n\right)$

a) $\frac{2^n}{3}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ de raison 2 et $2 > 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 0$ car $3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{5}$ et $-1 < \frac{1}{5} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 1$.

c) $3^n - 2^n = 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est le terme général d'une suite géométrique de raison 3 et

3 > 1.

Donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=+\infty$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3^n-2^n\right)=+\infty$.

5) Limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme positif et non nul u_0.
- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0+u_1+u_2+...+u_n=+\infty$.
- Si $0<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0+u_1+u_2+...+u_n=u_0\frac{1}{1-q}$.

Démonstration :

$$u_0+u_1+u_2+...+u_n$$
$$=u_0+u_0q+u_0q^2+...+u_0q^n$$
$$=u_0\left(1+q+q^2+...+q^n\right)$$
$$=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- Si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-q^{n+1}\right)=-\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-q^{n+1}\right)=-\infty$.

Or $u_0>0$ et $1-q<0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=+\infty$.

- Si $0<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-q^{n+1}\right)=1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=u_0\frac{1}{1-q}$.

6) Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite (q^n) est inférieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Entrée
Saisir le réel A
 	
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 2
 	
Traitement des données
Tant que u > A
    Faire
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à u la valeur u/4
 	
Sortie
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 0,1, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, la suite est inférieure à 0,1.
En langage calculatrice, cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U>A :N+1→N :U/4→U :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ 0→N↵ 2→U↵ While U>A↵ N+1→N↵ U÷4→U↵ WhileEnd↵ N

III. Suites arithmético-géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple :
Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$
La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

Méthode : Etudier une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) précédente définie pour tout entier n par $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10ème année.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.
5) Etudier les variations de (u_n).
6) Calculer la limite de (u_n).

1) Avec le tableur, on obtient :

B2 | f_x =1,03*B1+300

	A	B	C	D
1	Année 0	5000		
2	Année 1	5450		
3	Année 2	5913,5		
4	Année 3	6390,905		
5	Année 4	6882,6322		
6	Année 5	7389,1111		
7	Année 6	7910,7844		
8	Année 7	8448,108		
9	Année 8	9001,5512		
10	Année 9	9571,5978		
11	Année 10	10158,746		

La somme totale épargnée à la 10ème année est égale à environ 10158,75 €.

2)
$v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$
$= 1,03u_n + 300 + 10000$
$= 1,03u_n + 10300$
$= 1,03(u_n + 10000)$
$= 1,03v_n$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$.
On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

5) Pour tout n,
$u_{n+1} - u_n = 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000)$
$= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n)$
$= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1)$
$= 450 \times 1,03^n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme 1,03 > 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,03^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(15000\times 1,03^n\right) = +\infty$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(15000\times 1,03^n - 10000\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.