

SUITES GEOMETRIQUES

I. Rappels

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5,$$

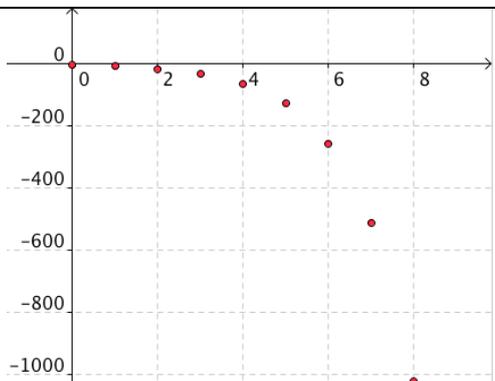
$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite introduite plus haut est définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

	(u_n) une suite géométrique de raison q de premier terme u_0 .	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On note u_n le capital après n années.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520 \quad u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80 \quad u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1,04^n$

II. Somme de termes consécutifs

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/rlaYMXpbWE8>

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13} = \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} = 2391484$$

Démonstration de la propriété :

On pose : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

On veut montrer que : $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

On veut donc montrer que : $S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$

$$\begin{aligned}
& S \times (1 - q) \\
&= S - q \times S \\
&= (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - q(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\
&= 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q - q^2 - q^3 - \dots - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/XcszOqP9sbk>

Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

On note (u_n) le capital injecté au n -ième mois alors $u_{n+1} = 0,7u_n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $u_0 = 20000$.

Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned}
S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{11} \\
&= 20000 + 20000 \times 0,7 + 20000 \times 0,7^2 + \dots + 20000 \times 0,7^{11} \\
&= 20000 \times (1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{11}) \\
&= 20000 \times \frac{1 - 0,7^{12}}{1 - 0,7} \approx 65744
\end{aligned}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales