

PRODUIT SCALAIRE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre. Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I. Définition et propriétés

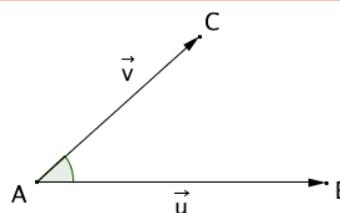
1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur \vec{u} et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " \vec{u} scalaire \vec{v} ".

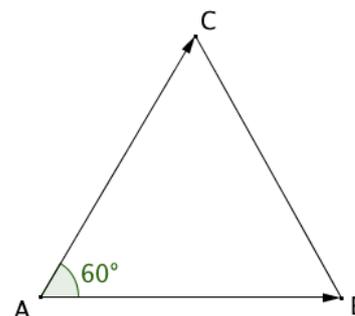
Remarque :

Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

 **Vidéo** <https://youtu.be/CJxwKG4mvWs>

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .
Calculer, en fonction de a , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} \\ &= a \times a \times \cos 60^\circ \\ &= a^2 \times 0,5 \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Démonstration :

On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v}; \vec{u})) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ 2) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$, avec k un nombre réel.

- Admis -

Calculer un produit scalaire à l'aide de la bilinéarité :

 **Vidéo** <https://youtu.be/P0nKS-cTE00>

5) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

II. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Soit un vecteur \vec{u} , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$$

On a ainsi : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration de la première formule :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

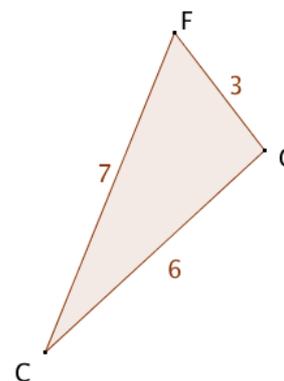
Démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \end{aligned}$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} &= \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) \\ &= 38 \end{aligned}$$



2) Théorème d'Al Kashi



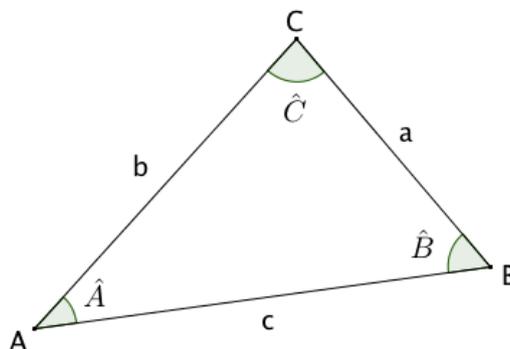
A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* (1380 ; 1430) vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son *Traité sur le cercle* (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

$$2\pi \approx 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



Démonstration :

▶ Vidéo https://youtu.be/340JiQ_4-N4

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A} = bc \cos \hat{A}$$

et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos \hat{A}$$

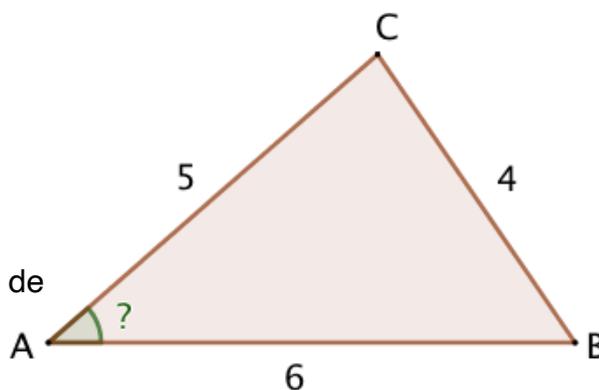
$$\text{Soit : } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \hat{A}$$

$$\text{Soit encore : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

▶ Vidéo <https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc>

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle \widehat{BAC} au degré près.



D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cos \widehat{BAC}$$

$$60 \cos \widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$$

$$60 \cos \widehat{BAC} = 45$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{45}{60}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{4}$$

$$\widehat{BAC} \approx 41^\circ$$

III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

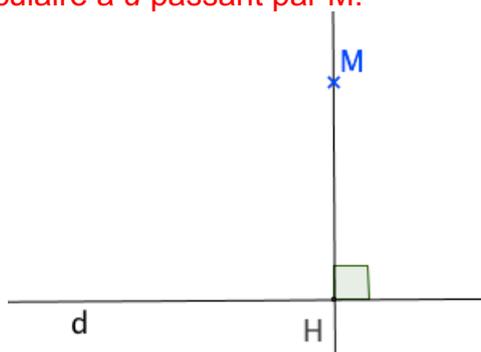
$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

\Leftrightarrow Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

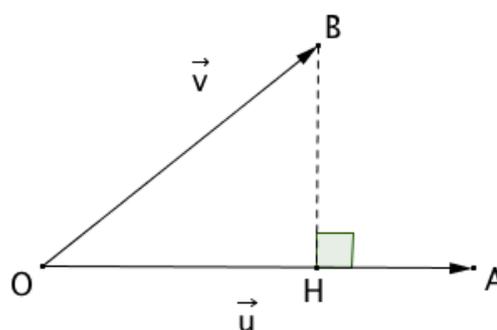
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



Démonstration :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

En effet, les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{HB} sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

▶ Vidéo <https://youtu.be/2eTsaa2vVnl>

Soit un carré ABCD de côté c .

Calculer, en fonction de c , les produits scalaires :

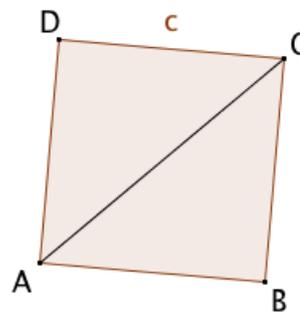
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$



3) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration :

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$

Soit :

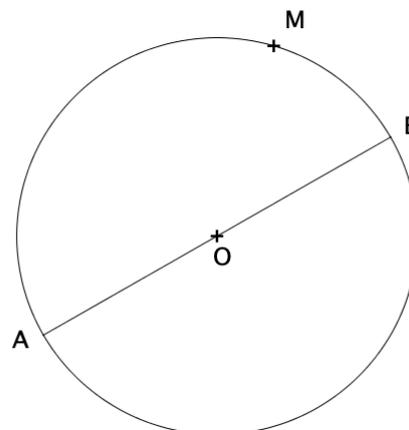
$$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \quad \text{car } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$$

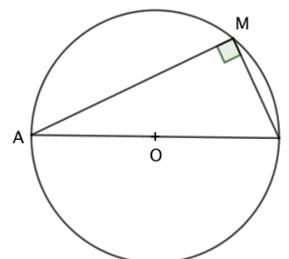
Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].



Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.



IV. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$.
On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\|\vec{j}\|^2 \\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$

car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

▶ Vidéo <https://youtu.be/aOLRbG0libY>

▶ Vidéo <https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ>

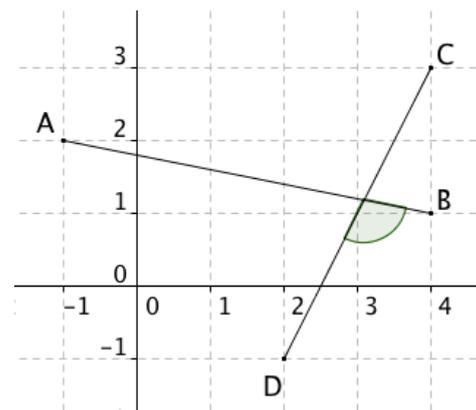
Soit $\vec{u}(5 ; -4)$ et $\vec{v}(-3 ; 7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

▶ Vidéo https://youtu.be/ca_pW79ik9A

Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \\ &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (2 - 1)^2} \times \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \\ &= \sqrt{520} \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \\ &= 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})\end{aligned}$$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5 ; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2 ; -4)$, donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$$

$$\text{On a ainsi : } 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = -6$$

$$\text{Et donc : } \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$\text{Et : } (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \approx 105,3^\circ.$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales