

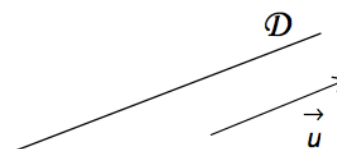
REPÉRAGE

I. Vecteur directeur d'une droite

Définition :

D est une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul \vec{u} qui possède la même direction que la droite D .



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

▶ Vidéo <https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y>

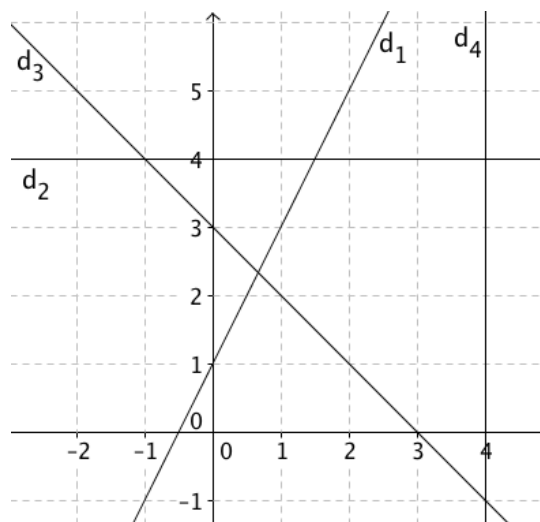
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .

Pour d_1 : $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{c} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour d_2 : $\vec{d} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour d_3 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour d_4 : $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.



II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b; a)$.

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D .

Démonstration :

▶ Vidéo <https://youtu.be/GVDUrdsRUdA>

Soit $A(x_0; y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u}(\alpha; \beta)$ un vecteur directeur de D .

Un point $M(x ; y)$ appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0$ soit encore $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$.

$$\text{Donc : } \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$$

$$\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$$

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$$

Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.

Les coordonnées de \vec{u} sont donc $(\alpha ; \beta) = (-b ; a)$.

Exemple :

Soit une droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.

Alors le vecteur \vec{u} de coordonnées $(5 ; 4)$ est un vecteur directeur de d .

Théorème réciproque :

L'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

▶ Vidéo <https://youtu.be/rLxQibQkPsQ>

▶ Vidéo <https://youtu.be/NosYmLLFB4>

▶ Vidéo <https://youtu.be/i5WD8lZdEqk>

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 5)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5 ; 3)$ et $C(1 ; -3)$.

1) Soit un point $M(x ; y)$ de la droite d .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0$ soit encore

$$\begin{vmatrix} x - 3 & -1 \\ y - 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Donc : } 5(x - 3) - (-1)(y - 1) = 0.$$

$$\text{Ou encore : } 5x + y - 16 = 0.$$

Une équation cartésienne de d est : $5x + y - 16 = 0$.

Remarque :

Une autre méthode consiste à appliquer directement le premier théorème énoncé plus haut.

Ainsi, comme $\vec{u}(-1 ; 5)$ est un vecteur directeur de d , une équation de d est de la forme :

$$5x + 1y + c = 0.$$

Pour déterminer c , il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) B et C appartiennent à d' donc \overrightarrow{BC} est un vecteur directeur de d' .

$$\text{On a : } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

$B(5 ; 3)$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Tracer une droite dans un repère :

📺 Vidéo <https://youtu.be/EchUv2cGtzo>

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D .

- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D .

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple : Soit d dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.

Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

Propriété :

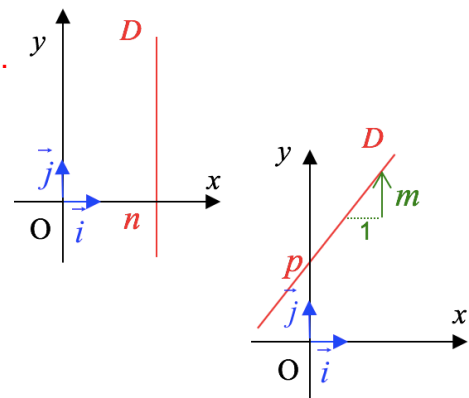
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :

alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.

- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :

alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.



Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

a) Coefficient directeur : -2 b) Coefficient directeur : 0
 Ordonnée à l'origine : 3 Ordonnée à l'origine : 5

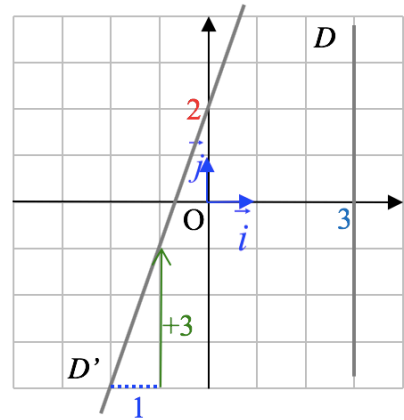
b) L'équation peut s'écrire : $y = -2x + \frac{1}{2}$
 Coefficient directeur : -2
 Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

Exemples :

La droite D a pour équation $x = 3$

La droite D' a pour équation $y = 3x + 2$.

Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est $+3$.



Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Vidéo <https://youtu.be/cUdhxkaTgqk>

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Dans ce repère, tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 d'équations réduites respectives :

$$y = 2x + 3,$$

$$y = 4,$$

$$x = 3.$$

- La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1 .

Soit B le point d'abscisse -2 appartenant à la droite d_1 . Les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1 , donc :

$$y_B = 2x(-2) + 3 = -1.$$

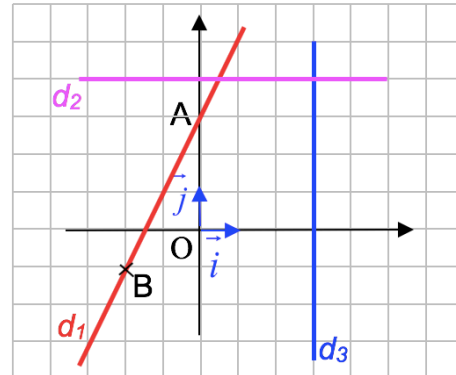
Le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1 .

On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par A et B.

- La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Pour tracer la droite d_2 , on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.

- La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Propriété réciproque :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.

L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont tels que :

$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

► Vidéo <https://youtu.be/XA0YajthETQ>

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Les points $A\begin{pmatrix} 6,4 \\ 42 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 346 \\ 2419 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

- Dire que le point $A\begin{pmatrix} 6,4 \\ 42 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d .

Ce qui n'est pas le cas, puisque $42 \neq 7 \times 6,4 - 3 = 41,8$.

Le point A n'appartient donc pas à la droite d .

- Les coordonnées de $B\begin{pmatrix} 346 \\ 2419 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation de la droite d . En effet :

$2419 = 7 \times 346 - 3$ donc le point B appartient à la droite d .

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement :

► Vidéo <https://youtu.be/XA0YajthETQ>

2) Pente d'une droite

Propriété :

Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/tfaqLy6QRuw>

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ deux points d'une droite d .

Déterminer une équation de la droite d .

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$

Comme $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d , ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

$-1 = -6 \times 4 + p$. D'où $p = -1 + 6 \times 4 = 23$

Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$.

ALGORITHME

```
def droite(xA, yA, xB, yB): TP avec Python : Déterminer une équation de droite
    m=...                               passant par deux points donnés
    p=...                               https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo\_EqDroite.pdf
    print('y=', m, 'x+', p)
```

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

► Vidéo <https://youtu.be/NjsVdVolhvU>

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10 ; 6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1 .

Le vecteur $\vec{v}(-15 ; -9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2 .

Calculons $\det(\vec{u} ; \vec{v})$:

$$\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

2) A l'aide de l'équation réduitePropriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
Position de D et D'	$D // D'$	D et D' sont sécantes	Si $m = m'$	Si $m \neq m'$
			$D // D'$	D et D' sont sécantes
Représentation				

► Vidéo <https://youtu.be/qTUPGw7Bulc>

Exemples :

Dans un repère du plan, d_1 , d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4, y = 3x + 9, x = 8$$

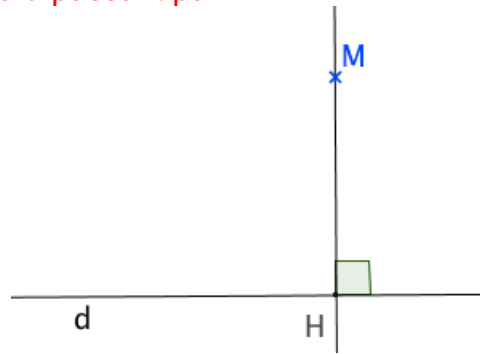
Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.

Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

V. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



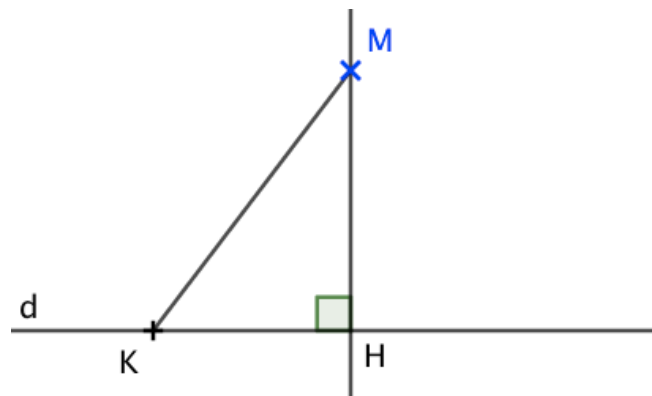
Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche du point M .

Démonstration :

📺 Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d .

Supposons qu'il existe un point K de la droite d plus proche de M que l'est le point H .



$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M .

Donc $KM^2 \leq HM^2$.

Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.

Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H .

On en déduit que H est le point de la droite le plus proche du point M .

Méthode : Démontrer que $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

 Vidéo <https://youtu.be/9r2qDd7EkMo>

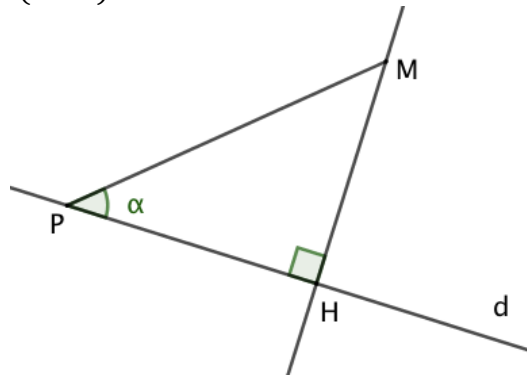
Soit une droite d et un point P appartenant à d .

Soit un point M n'appartenant pas à d .

On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite d .

On note α l'angle \widehat{MPH} .

Démontrer que $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.



Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos \alpha = \frac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos \alpha$.

De même, on a : $\sin \alpha = \frac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin \alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$

Soit en remplaçant : $(PM \times \cos \alpha)^2 + (PM \times \sin \alpha)^2 = PM^2$

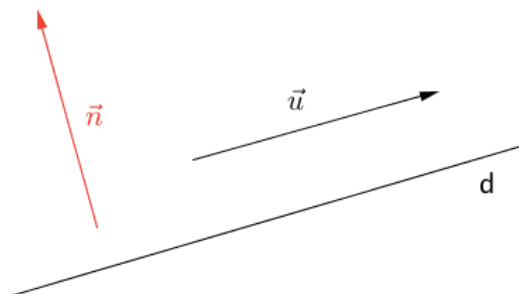
Soit encore : $PM^2 \times (\cos \alpha)^2 + PM^2 \times (\sin \alpha)^2 = PM^2$

Soit enfin, en simplifiant : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.

VI. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite d .

On appelle **vecteur normal** à une droite d , un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .



Exemple :

Soit la droite d d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.

Un vecteur directeur de d est : $\vec{u}(3 ; 2)$.

Un vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ de d est tel que : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Soit : $3a + 2b = 0$.

$a = -2$ et $b = 3$ conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(-2 ; 3)$ est un vecteur normal de d .

Propriétés : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a ; b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :

- Soit un point $A(x_A ; y_A)$ de la droite d .

$M(x ; y)$ est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Soit : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

$ax + by - ax_A - by_A = 0$.

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d alors $\vec{u}(-b ; a)$ est un vecteur directeur de d .

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

 Vidéo <https://youtu.be/oR5QoWCiDlo>

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-5 ; 4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3 ; -1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d .

Comme $\vec{n}(3 ; -1)$ est un vecteur normal de d , une équation cartésienne de d est de la forme $3x - y + c = 0$

Le point $A(-5 ; 4)$ appartient à la droite d , donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc : $c = 19$.

Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

 Vidéo <https://youtu.be/-HNUbyU72Pc>

Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $(2 ; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur la droite d .

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH).

Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}(-3 ; 1)$ est un vecteur directeur de d .

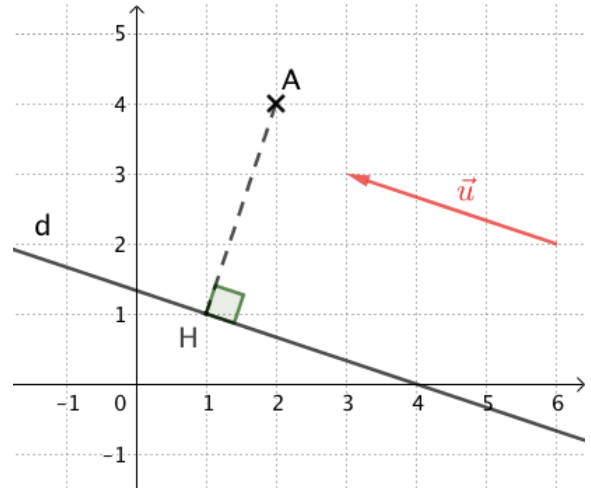
Et donc $\vec{u}(-3 ; 1)$ est un vecteur normal de (AH).

Une équation de (AH) est de la forme
 $-3x + y + c = 0$.

Or, le point A(2 ; 4) appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.

Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.



- H est le point d'intersection de d et (AH), donc ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit encore } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit enfin } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite d , a pour coordonnées (1 ; 1).

VII. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r est :
 $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Éléments de démonstration :

Tout point $M(x ; y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

▶ Vidéo <https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM>

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère le cercle C de centre $A(4; -1)$ et passant par le point $B(3; 5)$.
Déterminer une équation du cercle C .

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle C :

$$r^2 = AB^2 = (3 - 4)^2 + (5 - (-1))^2 = 37$$

Une équation cartésienne du cercle C est alors : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

 Vidéo <https://youtu.be/nNidpOAhLE8>

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
 $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées $(1; 5)$ et de rayon 3.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales