# LES VECTEURS

1. Translation

Exemple :

 B

T ’

T

 80m Une translation est un glissement :

 A - avec une direction donnée :

câble du téléphérique, la droite (AB),

- avec un sens donné :

le téléphérique monte de A vers B,

- avec une longueur donnée :

80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T’ est l’image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

Définition :

Soit P et P’ deux points distincts du plan.

On appelle **translation** qui envoie P sur P’ la transformation dont l’image F’ d’une figure F est obtenue en faisant glisser la figure F :

P

P’

F

F’

* selon la direction de la droite (PP’),
* dans le sens de P vers P’,
* d’une longueur égale à PP’.

Méthode : Construire l’image d’une figure par une translation

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk**](https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk)

Soit ***t*** la translation qui transforme A en A’.

Construire l’image B’C’D’E’ du trapèze BCDE par la translation ***t***.



1. Vecteurs
	1. Définition :

Définition :

Soit *t* la translation qui envoie A sur A’, B sur B’ et C sur C’.

Les couples de points (A ; A’), (B ; B’) et (C ; C’) définissent un **vecteur** caractérisé par :

* une direction : celle de la droite (AA’),
* un sens : de A vers A’,
* une longueur : la longueur AA’.



On note $\vec{u}$ce vecteur et on écrit : $\vec{u}$ *=* $\vec{AA'}$*.*

On dit que$\vec{AA'}$ *e*st un **représentant** de $\vec{u}$*.*

$\vec{BB'}$et$\vec{CC'}$sont également des représentants de $\vec{u}$*.*

Remarque : La longueur d’un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.



« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)

Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\vec{AB}$ en 1920.

A l’origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

* 1. Égalité de vecteurs

Définition :

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **égaux** lorsqu’ils ont même direction, même sens et même longueur.

On note $\vec{AB}$ = $\vec{CD}$.

Exemple :

Ci-dessous, on peut poser : $\vec{u}$ = $\vec{AB}$ = $\vec{CD}$.

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



Propriété du parallélogramme :

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

Dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

B

A

D

C

D

C

B

A

Démonstration :

* Si $\vec{AB}$ = $\vec{CD}$, la translation de vecteur $\vec{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction.

Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.

* Réciproquement : Les côtés opposés d’un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, déﬁnis à l’aide des segments [AB] et [CD] d’un parallélogramme ABDC, sont égaux.

Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zcQPz4dfnn0**](https://youtu.be/zcQPz4dfnn0)

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

A

D

B

C

$\vec{DE}$ = $\vec{BC}$

$\vec{CF}$ = $\vec{DC}$

$\vec{BG}$ = $\vec{AB}$

$\vec{HA}$ = $\vec{BC}$

H

B

A

G

F

D

C

E

Propriété du milieu :

Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire

que $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$sont égaux.

 Exercice : Utiliser des propriétés sur les vecteurs :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XokpP\_8mTOE**](https://youtu.be/XokpP_8mTOE)

* 1. Vecteur nul

Définition :

Un vecteur $\vec{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\vec{AB}$ = $\vec{0}$.

Remarque : Pour tout point M, on a : $\vec{MM} $=$\vec{0}$.

* 1. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !

Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).

Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».

A

B

Définition :

Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu’ils ont la même direction, la même longueur et qu’ils sont de sens contraire.



$\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont des vecteurs opposés.

On note $\vec{BA}$ = $-\vec{AB}$

1. Somme de vecteurs



* 1. Définition

Exemple :

Soit *t1* la translation de vecteur $\vec{u}$

et *t2* est la translation de vecteur $\vec{v}$*.*

Appliquer la translation *t1* puis la translation *t2* :

 *t1* *t2*

M M1 M*2*

revient à appliquer la translation *t* de vecteur $\vec{w}$ :

  *t*

M M*2*

Propriété :

La composée (ou l’enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}$ + $\vec{v}$*,* le vecteur$ \vec{w}$associé à la translation composée des translations de vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$*.*

* 1. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\vec{AC}$ = $\vec{AB}$ + $\vec{BC}$.



Remarque :

Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\vec{AB}$ *=* $\vec{AC}$ *+* $\vec{CB}$

$\vec{BC}$ *=* $\vec{BA}$ *+* $\vec{AC}$*.*



Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n’est pas de lui, mais nommée ainsi en

hommage à ses travaux sur les vecteurs.

Homme naïf, on raconte qu’il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d’arc à

sa mère, Vercingétorix à César,…) !

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fbVrdYiY0qc**](https://youtu.be/fbVrdYiY0qc)

Simplifier les écritures :

a) $\vec{AM}$ + $\vec{MN}$ b) $\vec{MP} $+ $\vec{AM}$ c) $\vec{OP}$ +$ \vec{KO}$ + $\vec{NK}$

d) $\vec{MN}$ + $\vec{NM}$ e) $\vec{MO}$ + $\vec{PM}$ + $\vec{OP}$ f) $\vec{KN}$ –$ \vec{ON}$ + $\vec{OK}$

a)$ \vec{AM}$ + $\vec{MN}$b) $\vec{MP} $+ $\vec{AM}$c)$\vec{OP}$ +$ \vec{KO}$ + $\vec{NK}$

 *=* $\vec{AN}$ *=* $\vec{AM}$ *+* $\vec{MP} $ *=* $\vec{KO}$ *+* $\vec{OP}$ *+* $\vec{NK}$

 *=* $\vec{AP} $ *=* $\vec{KP}$ *+* $\vec{NK}$

 *=* $\vec{NK}$ *+* $\vec{KP}$ *=* $\vec{NP}$

d) $\vec{MN}$ + $\vec{NM}$e) $\vec{MO}$ + $\vec{PM}$ + $\vec{OP}$f) $\vec{KN}$ –$ \vec{ON}$ + $\vec{OK}$

 *=* $\vec{MM}$ *=* $\vec{MO}$ *+* $\vec{OP}$ *+* $\vec{PM}$ *=*$ \vec{KN}$ *+* $\vec{NO}$ *+*$ \vec{OK}$

 *=* $\vec{0}$ *=* $\vec{MP}$ *+* $\vec{PM}$ *=* $\vec{KO}$ *+* $\vec{OK}$

 *=* $\vec{MM}$ *=* $\vec{0}$ *=* $\vec{KK}$ *=* $\vec{0}$

* 1. Conséquence :

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\vec{AC}$ *=* $\vec{AB}$ *+* $\vec{AD}$*,*

B

A

C

D

Démonstration :

D’après la relation de Chasles, l’égalité $\vec{AC}$ *=* $\vec{AB}$ *+* $\vec{AD}$ peut s’écrire :

$$\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AB}+\vec{AD}$$

Soit $\vec{DC}=\vec{AB}$*,*

soit encore : ABCD est un parallélogramme.

* 1. Différence de deux vecteurs

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}$ – $\vec{v}$*,* tel que : $\vec{u}$ – $\vec{v}$ *=* $\vec{u}$ + (–$\vec{v}$).

Méthode : Construire un point défini à partir d’une somme de vecteurs

C

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nzABUzFM6p8**](https://youtu.be/nzABUzFM6p8)

Soit un triangle ABC.

Construire le point *F* tel que $\vec{AF}$ = $\vec{BA}$ + $\vec{BC}$

A

B



On construit à partir de *A* (origine de $\vec{AF}$) le vecteur $\vec{BA}$ + $\vec{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.

On a ainsi construit un vecteur $\vec{AF}$ et donc le point *F*.

1. Produit d’un vecteur par un réel
	1. Définition



Exemple :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w}$ = $\vec{u}$ *+* $\vec{u}$ *+* $\vec{u}$ *+* $\vec{u}$ *+* $\vec{u}$ *=* $5\vec{u}$

Remarques :

* Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ont la même direction et le même sens.
* La norme du vecteur $5\vec{u}$est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et *k* un nombre réel non nul.

On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel *k*, le vecteur noté *k*$\vec{u}$ :

- de même direction que $\vec{u}$,

- de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,

- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,

 –k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.

$$\vec{u}$$

*k*$\vec{u}$

 *k*$\vec{u}$

*k* > 0 :

*k* < 0 :

Remarque :

Si $\vec{u}$ = $\vec{0}$ ou *k* = 0 alors *k*$\vec{u}$ = $\vec{0}$*.*

$$\vec{u}$$

*1,5* $\vec{u}$

$$-3\vec{u}$$

Exemples :

Les vecteurs $\vec{u}$*, 1,5*$ \vec{u}$et$-3\vec{u}$ ont la même direction.

$\vec{u}$ et *1,5*$ \vec{u}$sont de même sens.

$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.

La norme du vecteur *1,5*$ \vec{u}$est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.

La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

* 1. Construction

Méthode : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1C6KEwbO-b8**](https://youtu.be/1C6KEwbO-b8)

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et$ \vec{v}$.

Représenter les vecteurs suivants :

 2$\vec{u}$, $-\vec{v}$, 2$\vec{u}$ – $\vec{v}$.

B

C

A

2) Soit trois points A, B et C.

Représenter le vecteur $\vec{BC}$ – 3$\vec{AC}$.

1. 

Pour représenter le vecteur 2$\vec{u}$, on place bout à bout deux vecteurs $\vec{u}$.

Pour représenter le vecteur –$\vec{v}$, on représente un vecteur de même direction et même longueur que $\vec{v}$ mais de sens opposé.

Pour représenter le vecteur 2$\vec{u}$ – $\vec{v}$ ou 2$\vec{u} $+ (–$\vec{v}$), on place bout à bout les vecteurs 2$\vec{u}$ et –$\vec{v}$.

Dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit, le vecteur 2$\vec{u}$ –$ \vec{v}$ a pour origine l’origine du vecteur 2$\vec{u}$ et pour extrémité, l’extrémité du vecteur –$\vec{v}$.

On obtiendrait le même résultat en commençant par placer le vecteur –$\vec{v}$ et ensuite le vecteur 2$\vec{u}$.

B

C

A

$$\vec{BC}$$

 –3$\vec{AC}$

$\vec{BC}$–3$\vec{AC}$

Pour représenter le vecteur $\vec{BC}$ – 3$\vec{AC}$ou $\vec{BC}$*+* (–3$\vec{AC}$), on place bout à bout les vecteurs $\vec{BC}$ et *–*3$\vec{AC}$.

Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

O

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JxYpPE6iPEA**](https://youtu.be/JxYpPE6iPEA)

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.

Construire le point A tel que $\vec{OA}$ = 3$\vec{u}$ –$ \vec{v}$.

A

C

B

2) Soit trois points A, B, C du plan.

Construire le point M tel que $\vec{AM}$ = –$\vec{AB}$ + 3$\vec{AC}$.



1)

Pour représenter le vecteur $\vec{OA}$ = 3$\vec{u}$ – $\vec{v}$, on place bout à bout à partir du point O les vecteurs 3$\vec{u}$ et –$\vec{v}$.

Le point A se trouve à l’extrémité du vecteur –$\vec{v}$ dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

M

A

C

B

$\vec{AM}$ = –$\vec{AB}$ + 3$\vec{AC}$

3$\vec{AC}$

–$\vec{AB}$

2)

Pour représenter le vecteur $\vec{AM}$ = –$\vec{AB}$ + 3$\vec{AC}$, on place bout à bout à partir de A les vecteurs –$\vec{AB}$ et 3$\vec{AC}$.

Le point M se trouve à l’extrémité du vecteur 3$\vec{AC}$ dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d’autres vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ODZGKdIKewo**](https://youtu.be/ODZGKdIKewo)

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\vec{u}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{a}$$



On construit *« un chemin* *»* de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l’origine et l’extrémité du vecteur $\vec{u}$.

On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant *« le chemin »*.

 $\vec{u}$ = 3$\vec{a}$ + 3$\vec{b}$.

1. Notion de colinéarité
	1. Définition

Définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu’ils ont même direction c’est à dire qu’il existe un nombre réel *k* tel que  $\vec{u}$ *= k*$\vec{v}$*.*

 Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

$$\vec{u}$$

$\vec{v}$ *=* $-3\vec{u}$

Exemple :

$\vec{v}$ *=* $-3\vec{u}$

$\vec{u} $et$\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg**](https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg)

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que –4$\vec{u}$ + 3$\vec{v}$ = .

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

–4$\vec{u}$ + 3$\vec{v}$ = $\vec{0}$

–4$\vec{u}$ = –3$\vec{v}$

$\vec{u}$ = $\vec{v}$

Il existe un nombre réel *k* = $\frac{4}{3}$ tel que $\vec{v}$ = *k*$\vec{u}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

* 1. Applications

Propriétés :

1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.

Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

* 1. Transformations et vecteurs

Propriétés :

1) Si une symétrie centrale transforme A en A’ et B en B’ alors :$\vec{A'B'}$*=* $-\vec{AB}$.

2) Si une homothétie de rapport $λ$ transforme A en A’ et B en B’ alors :$\vec{A'B'}$*=* $λ\vec{AB}$.

1. Repère du plan

$$\vec{i}$$

$$\vec{j}$$

I

J

O

Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l’on peut noter (O, I, J).

L’origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose $\vec{i}$ = $\vec{OI}$ et $\vec{j}$ = $\vec{OJ}$*,* alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$).

Définitions :

- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$*,* $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$et$\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$et$\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.

- Un repère est dit **orthonormé** s’il est orthogonal et si $\vec{i}$et$\vec{j}$ sont de norme 1.

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère orthogonal*

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère orthonormé*

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère quelconque*

1. Coordonnées d’un vecteur

Définition : Soit M un point quelconque d’un repère (O,$\vec{i}$*,*$ \vec{j}$)

et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{OM}$ = $\vec{u}$.

Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du

point M.

On note : $\vec{u}$ (*x,* *y*) ou $\vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par lecture graphique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8PyiMHtp1fE**](https://youtu.be/8PyiMHtp1fE)

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD} $et $\vec{EF}$ par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un *« chemin »* de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mis bout à bout reliant l’origine et l’extrémité du vecteur $\vec{AB}$.

Ainsi $\vec{AB}$ = 3$\vec{i}$ + 2$\vec{j}$.

Les coordonnées de $\vec{AB}$ sont donc $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$. De même, $\vec{CD}$ = $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ et $\vec{EF}$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$.

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$ dans un repère (O,$\vec{i}$*,*$ \vec{j}$).

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{B}-x\_{A}\\y\_{B}-y\_{A}\end{matrix}\right)$.

Démonstration :

$\vec{AB}$ *=* $\vec{AO}$ *+* $\vec{OB}$ *=* –$\vec{OA}$ *+* $\vec{OB}$

Comme –$\vec{OA}$ *et* $\vec{OB}$ont pour coordonnées respectives $\left(\begin{matrix}-x\_{A}\\-y\_{A}\end{matrix}\right) $ (voir propriété qui suit) et $\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right) $alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{B}-x\_{A}\\y\_{B}-y\_{A}\end{matrix}\right)$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par calcul

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wnNzmod2tMM**](https://youtu.be/wnNzmod2tMM)

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD} $et $\vec{EF}$ par calcul avec :

A$\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)$, B$\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$, C$\left(\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right)$, D$\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right)$, E$\left(\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right)$ et F$\left(\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right)$.

 $\vec{AB}$ = $\left(\begin{matrix}5-2\\3-1\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$, $\vec{CD} $= $\left(\begin{matrix}-2-\left(-1\right)\\3-\left(-2\right)\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$,

 $\vec{EF} $= $\left(\begin{matrix}4-1\\-2-\left(-4\right)\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ dans un repère

(O,$\vec{i}$*,* $\vec{j}$) et un réel *k*.

- $\vec{u}$ = $\vec{v}$ équivaut à *x* = *x’* et *y = y’*

*-* Le vecteur$\vec{u}$ + $\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}x+x'\\y+y'\end{matrix}\right)$

*-* Le vecteur *k*$\vec{u}$apour coordonnées $\left(\begin{matrix}kx\\ky\end{matrix}\right)$

Remarque :

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ alors –$\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right)$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rC3xJNCuzkw**](https://youtu.be/rC3xJNCuzkw)

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs 3$\vec{AB}$, 4$\vec{CD}$ et 3$\vec{AB}$ – 4$\vec{CD}$.

On a : $\vec{AB}$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$ , $\vec{CD} $= $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ et $\vec{EF}$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$

3$\vec{AB}$ = $\left(\begin{matrix}3×3\\3×2\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}9\\6\end{matrix}\right)$, 4$\vec{CD}$ = $\left(\begin{matrix}4×\left(-1\right)\\4×5\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}-4\\20\end{matrix}\right)$

3$\vec{AB}$ – 4$\vec{CD}$= $\left(\begin{matrix}9-\left(-4\right)\\6-20\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}13\\-14\end{matrix}\right)$

Méthode : Calculer les coordonnées d’un point défini par une égalité vectorielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eQsMZTcniuY**](https://youtu.be/eQsMZTcniuY)

Dans un repère, soit les points A$\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)$, B$\left(\begin{matrix}-4\\3\end{matrix}\right)$, C$\left(\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB}=\vec{DC}$.

On a : $\vec{AB}\left(\begin{matrix}-4-1\\3-2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-5\\1\end{matrix}\right)$ et $\vec{DC}\left(\begin{matrix}1-x\_{D}\\-2-y\_{D}\end{matrix}\right)$

Donc $1-x\_{D}=-5$ et $-2-y\_{D}=1$

Soit $x\_{D}=6$ et $y\_{D}=-3$.

1. Colinéarité de deux vecteurs

 1) Critère de colinéarité

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ dans un repère

(O,$\vec{i}$*,* $\vec{j}$). Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : *xy’ – yx’* = 0.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VKMrzaiPtw4**](https://youtu.be/VKMrzaiPtw4)

* Si l’un des vecteurs est nul alors l’équivalence est évidente.
* Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ sont colinéaires équivaut à dire qu’il existe un nombre réel *k* tel que  $\vec{u}$ *= k*$\vec{v}$*.*

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$et$\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *x’* |
| *y* | *y’* |

Donc : *xy’ = yx’* soit encore *xy’ – yx’* = 0.

Réciproquement, si *xy’ – yx’* = 0.

Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l’une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que

*x’*≠0. Posons alors *k* = $\frac{x}{x^{'}}$. L’égalité *xy’ – yx’* = 0 s’écrit : *yx’* = *xy’.*

Soit : $y$ =$ \frac{xy^{'}}{x^{'}}$ = $ky'$.

Comme on a déjà $x$ = $kx'$, on en déduit que $\vec{u}$ *= k*$\vec{v}$*.*

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eX-\_639Pfw8**](https://youtu.be/eX-_639Pfw8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\left(\begin{matrix}4\\-7\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}-12\\21\end{matrix}\right)$ b) $\vec{u}\left(\begin{matrix}5\\-2\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}15\\-7\end{matrix}\right)$

a) 4 x 21 – (–7) x (–12) = 84 – 84 = 0.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

On peut également observer directement que $\vec{v}=-3\vec{u}$.

b) 5 x (–7) – (–2) x (15) = –35 + 30 = –5 ≠ 0.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

 2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ dans un repère (O,$\vec{i}$*,* $\vec{j}$).

Le nombre *xy’ – yx’* est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}x&x'\\y&y'\end{matrix}\right|=xy^{'}-yx'$.

Propriété :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l’aide du déterminant

 **Vidéo** [**https://youtu.be/MeHOuwy81-8**](https://youtu.be/MeHOuwy81-8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\left(\begin{matrix}-6\\10\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}9\\-15\end{matrix}\right)$ b) $\vec{u}\left(\begin{matrix}4\\9\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}11\\23\end{matrix}\right)$

a) $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}-6&9\\10&-15\end{matrix}\right|=\left(-6\right)×\left(-15\right)-10×9=90-90=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}4&11\\9&23\end{matrix}\right|=4×23-9×11=92-99=-7\ne 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

 3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/hp8v6YAQQRI**](https://youtu.be/hp8v6YAQQRI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dZ81uKVDGpE**](https://youtu.be/dZ81uKVDGpE)

On considère (O,$\vec{i} $*,* $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\left(\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right)$, B$\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$, C$\left(\begin{matrix}-2\\-3\end{matrix}\right)$, D$\left(\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right)$ et E$\left(\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right)$.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

1) $\vec{AB}$ = $\left(\begin{matrix}3-\left(-1\right)\\2-1\end{matrix}\right)$=$\left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right)$ et $\vec{CD}$ = $\left(\begin{matrix}6-\left(-2\right)\\-1-\left(-3\right)\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right)$.

Comme les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) $\vec{EB} $= $\left(\begin{matrix}3-5\\2-0\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right)$ et $\vec{ED}$ = $\left(\begin{matrix}6-5\\-1-0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right)$.

 $det\left(\vec{EB} ; \vec{ED}\right)=\left|\begin{matrix}-2&1\\2&-1\end{matrix}\right|=-2×\left(-1\right)-2×1=0$

Les coordonnées de $\vec{EB}$ et $\vec{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.

On en déduit que les vecteurs $\vec{EB}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires.

Les points E, B et D sont donc alignés.

1. Coordonnées du milieu d’un segment

Propriété : Soit A et B deux points de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$ dans un repère

(O,$\vec{i}$*,* $\vec{j}$). Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

 $\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(x\_{A}+x\_{B}\right)\\\frac{1}{2}\left(y\_{A}+y\_{B}\right)\end{matrix}\right)$

B

O

M

A

Démonstration :

Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.

Soit M son centre.

Alors $\vec{OM}$ = $\frac{1}{2} $($\vec{OA}$ + $\vec{OB}$).

J

I

0

A

B

CV

$\vec{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}$ ($\vec{OA}$ + $\vec{OB}$) soit : $\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(x\_{A}+x\_{B}\right)\\\frac{1}{2}\left(y\_{A}+y\_{B}\right)\end{matrix}\right)$

Méthode : Calculer les coordonnées d’un milieu

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YTQCtSvxAmM**](https://youtu.be/YTQCtSvxAmM)

On considère (O,$\vec{i} $*,* $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\left(\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)$, B$\left(\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right)$ et C$\left(\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right)$.

Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs

de [AB], [AC] et [BC].

M ( $\frac{2+\left(-2\right)}{2} $; $\frac{3+1}{2}$ ) = (0 ; 2) N ( $\frac{2+3}{2}$; $\frac{3+\left(-1\right)}{2}$ ) = (2,5 ; 1)

P ( $\frac{-2+3}{2}$; $\frac{1+\left(-1\right)}{2}$ ) = (0,5 ; 0)

1. Distance dans un repère orthonormé

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$ dans un repère ***orthonormé***

(O,$\vec{i}$*,* $\vec{j}$), alors : AB = $\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$

 *(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)*

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pP8ebg8W9o8**](https://youtu.be/pP8ebg8W9o8)

Soit A$\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$ et B$\left(\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right)$ deux points dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$*,*$ \vec{j}$).

La distance AB (ou norme du vecteur $\vec{AB}$) est égale à :

AB = $\sqrt{\left(2-3\right)^{2}+\left(-2-2\right)^{2}}$

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

B

A

 = $\sqrt{1+16}$

 = $\sqrt{17}$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)