COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

I. Notion de dénombrement sur un ensemble fini

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple :
On considère l'ensemble E des élèves de votre classe. Alors $card(E)$ = **...**
Compléter par le nombre d'élèves de la classe.

1) Principe additif

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété : Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles finis deux à deux disjoints.
Alors $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card(E_n)$

Exemple :
Soit $E_1 = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ et $E_2 = \{\alpha\,;\beta\,;\gamma\}$
Alors $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (E_1 et E_2 sont disjoints) et on a :

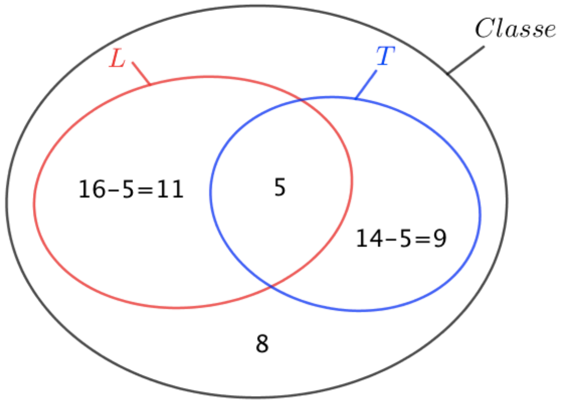
$$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$$

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre.
On a alors : $Card(L) = 16$
$Card(T) = 14$
$Card(L \cap T) = 5$
$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$

Schématisons la situation à l'aide d'un diagramme :



On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à :
$11 + 5 + 9 + 8 = 33$.

2) Principe multiplicatif

Exemple : Chaque femme choisit une robe et un renard de façon aléatoire.
On considère les 3 ensembles suivants :
$E_1 = \{renard\ roux\ ; renard\ noir\ ; renard\ blanc\}$
$E_2 = \{femme\ rousse\ ; femme\ brune\ ; femme\ blonde\}$
$E_3 = \{robe\ rouge\ ; robe\ noire\ ; robe\ blanche\}$

On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de E_1, d'un élément de E_2 et d'un élément de E_3.
La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :
$(renard\ blanc, femme\ brune, robe\ rouge)$
$(renard\ roux, femme\ blonde, robe\ noire)$
$(renard\ noir, femme\ rousse, robe\ blanche)$
Il existe $3 \times 3 \times 3 = 27$ triplets différents.

Définitions : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_p$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des ***p*-uplets** $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ … $a_p \in E_p$.

Remarque : Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple : On lance deux dés à six faces. On note $E = \{1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\ ; 5\ ; 6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.
Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :

$$(1,2) \in E^2$$
$$(6,3) \in E^2$$
$$(5,5) \in E^2$$

Il existe $6 \times 6 = 36$ couples appartenant à E^2.

Propriété : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$. Alors on a :

$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card(E_p)$$

Méthode : Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

Vidéo https://youtu.be/wzo1XXXaaqY

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Il existe 24 menus différents.

b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12$

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

Propriété : Soit un ensemble fini E à n éléments. Alors on a :

$$Card(E^p) = n^p$$

Méthode : Dénombrer le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments

Vidéo https://youtu.be/rIEbdewpIHI

Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger.

« Il y avait pour entrer juste un digicode
Deux lettres et dix chiffres incommodes
Un détail que t'avais surement oublié
4 milliards de possibilités »

Pour écouter la chanson : https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Digicode.mp3

Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet et N l'ensemble des chiffres.
On a alors : $Card(A) = 26$ et $Card(N) = 10$.

Pour le choix des 2 lettres, on compte $Card(A^2) = 26^2 = 676$ possibilités.
Pour le choix des 10 chiffres, on compte $Card(N^{10}) = 10^{10}$ possibilités.

Nombre de possibilités du digicode :
$Card(A^2 \times N^{10}) = Card(A^2) \times Card(N^{10}) = 676 \times 10^{10} = 6\,760\,000\,000\,000$
Soit environ 7 000 milliards de possibilités et non pas 4 milliards comme dans la chanson.

A noter : Un digicode contient généralement seulement deux lettres à choisir : A et B.
Dans ce cas :
$Card(A \times N^{10}) = Card(A) \times Card(N^{10}) = 2 \times 10^{10} = 20\,000\,000\,000$ soit 20 milliards. Cela reste loin encore des 4 milliards de la chanson.

II. Arrangements et permutations

1) La factorielle d'un nombre

Définition : On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.
Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Remarque : $n!$ se lit « factorielle n ».

Exemples :
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$100! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 99 \times 100$
$1! = 1$
$0! = 1$ par convention

2) Arrangements

Exemple :
On considère l'ensemble $E = \{a\,; b\,; o\,; p\,; r\}$.

- Les triplets (b, o, a) et (r, a, p) sont des arrangements à 3 éléments de E.
Et (p, a, r) est un arrangement à 3 éléments de E différent de (r, a, p). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

- Le quintuplet (p, r, o, b, a) est un arrangement à 5 éléments de E.

- Le sextuplet (b, a, r, b, a, r) n'est pas un arrangement de E car des éléments se répètent.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$.
Un **arrangement** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E.

Propriété : Dans un arrangement l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple : On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.

- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Méthode : Dénombrer en utilisant les arrangements

Vidéo https://youtu.be/2fKdO9t8wfo

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil.

Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.
Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement.

Voir cet exercice en version filmée : http://youtu.be/tbQtm1ufllY

Fred doit choisir 3 positions parmi 12. L'ordre a une importance, on voit que les prises sont de différentes couleurs.
Il existe 12 positions possibles pour la 1ère prise. Celle-ci étant fixée, il existe alors 11 positions pour la 2e et ainsi 10 positions pour la 3e prise.
En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de postions possibles est égal à : $12 \times 11 \times 10 = 1320$.
On peut également considérer que le nombre de positions possibles est un arrangement de 3 éléments parmi 12, soit :

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = \frac{1 \times 2 \times \ldots 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = 10 \times 11 \times 12$$
$$= 1320$$

Parmi les 1320 positions, une seule est la bonne. La probabilité que Fred retrouve le bon branchement est égal à : $\frac{1}{1320}$.

3) Permutations

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des permutations de E car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un arrangement à n éléments de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple :
Il existe $3! = 6$ façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

Méthode : Dénombrer en utilisant les permutations

Vidéo https://youtu.be/kWEFtcWI_xU

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places.
On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.

C'est le moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.
- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.
Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

- Proposition des mathématiciens :
Le nombre de façons de placer ces 12 scientifiques est égal au nombre de permutations dans un ensemble à 12 éléments, soit :
12! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 × 9 × 10 × 11 × 12 = 479 001 600.

- Proposition des physiciens :
Le groupe des physiciens est composé de 3 personnes. Vu qu'ils souhaitent s'assoir côte à côte, le groupe dispose de 10 positions possibles :
Les places 1-2-3 ou 2-3-4 ou 3-4-5 ou … ou 10-11-12.
Au sein du groupe des physiciens, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments, soit : 3! = 6.
Au sein du groupe formé par les autres scientifiques, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 12 – 3 = 9 éléments, soit : 9! = 362 880.
Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s'assoir selon les physiciens est égal à : 10 × 6 × 362 880 = 21 772 800.

- Proposition des biologistes :
Le nombre d'ordres possibles pour placer le groupe des femmes et des hommes est égal à 2 : hommes-femmes ou femmes-hommes.
Au sein du groupe des femmes, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments, soit : 6! = 720.
De même pour le groupe des hommes : 6! = 720.
Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s'assoir selon les biologistes est égal à : 2 × 720 × 720 = 1 036 800.

III. Combinaisons

1) Nombre de combinaisons

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2 ; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1 ; 2\}$ et $\{2 ; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{p}$.

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Méthode : Dénombrer en utilisant les combinaisons

Vidéo https://youtu.be/_ip2dV_BUTM

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

a) On compte le nombre de combinaison de 4 élèves parmi $18 + 16 = 34$ élèves, soit :

$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!\,(34-4)!} = \frac{34!}{4!\,30!} = \frac{31 \times 32 \times 33 \times 34}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46376$$

b) On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.
Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit le nombre de combinaisons de 2 élèves parmi 32 élèves, soit encore :

$$\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!\,(32-2)!} = \frac{32!}{2!\,30!} = \frac{31 \times 32}{1 \times 2} = 496$$

Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à $46376 - 496 = 45880$.

2) Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{p}$ de combinaisons de p parmi n porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{p}$. Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Propriété du triangle de Pascal : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/xVNjVABYOno

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!\,(n-p)} + \frac{n!}{p!\,(p+1)(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right) \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right) \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right) \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(p+1)(n-p-1)!\,(n-p)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Méthode : Calculer des coefficients binomiaux

Vidéo https://youtu.be/-gvIrfFdaS8

Vidéo https://youtu.be/mfcBNIUuGaw

Calculer : a) $\binom{25}{24}$ b) $\binom{4}{2}$

1) $\binom{25}{24} = \binom{25}{25-24} = \binom{25}{1} = 25.$
2) $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{3}{2} = 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 2 + 1 = 6$

Avec la calculatrice : Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme "***combinaison***" ou "***nCr***".
Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : 25***combinaison***24 ou 25***nCr***24 suivant le modèle de calculatrice.

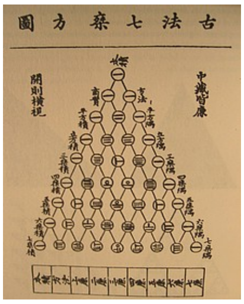
Avec un tableur : La fonction se nomme "***COMBIN***". Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : =***COMBIN***(25;24)

3) Triangle de Pascal

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la propriété du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal peut être utilisé par exemple pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux.

Vidéo https://youtu.be/6JGrHD5nAoc



Blaise Pascal (1623 ; 1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui "triangle de Pascal". Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie* (XIIe siècle).
Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).

↓ Exemple pour $\binom{4}{2}$

n \ p	0	1	**2**	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2}$ =6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

↑ Exemple pour $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$.

4) Parties d'un ensemble

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Démonstration :
Vidéo https://youtu.be/xVNjVABYOno

- Le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à n éléments.
Soit : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$

- Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où à chaque élément de E, on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l'inclure dans le sous-ensemble.
Il y a donc deux possibilités par étape et il y a n étapes.
Il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n facteurs) possibilités de construire un sous-ensemble de E, soit 2^n.

Exemple :
Soit : $E=\{1,2,3\}$.
Alors toutes les parties de E sont :
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.
Elles sont au nombre de 8 et en effet : $2^3=8$.

Arrangement, permutation, combinaison... : lequel choisir ? :
Vidéo https://youtu.be/8MVCbhQF2ak