NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu’un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit   pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli*(1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell’aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme  et poursuit les travaux de *Cardan*sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.   
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d’entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu’une solution d’équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l’ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l’esprit.

I. L'ensemble

1) Définition

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté , appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- contient .

- Dans , on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans .

- Il existe dans un nombre *i* tel que .

- Tout élément de s'écrit de manière unique sous la forme avec et réels.

Exemples :

; ; sont des nombres complexes. Et les nombres réels 0, 2 ou sont également des nombres complexes !

Vocabulaire :

* L'écriture d'un nombre complexe est appelée la **forme algébrique** de .
* Le nombre s'appelle la **partie réelle** et la nombre s'appelle la **partie imaginaire**. On note : et .

Remarques :

- Si alors est un nombre réel.

- Si alors est un nombre imaginaire pur.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres complexes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-aaSfL2fhTY**](https://youtu.be/-aaSfL2fhTY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ**](https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ)

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

Propriétés :

a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration :

Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe .

On appelle **nombre complexe conjugué** de , le nombre, noté , égal à .

Exemples :

- et

- On peut également noter :

 ;  ;

Propriétés : Soit et deux nombres complexes et entier naturel non nul.

a) b) c)

d) e) avec f) avec

Démonstrations :

On pose et avec , , et réels.

a)

b)

c)

Donc :

d) On procède par récurrence.

* L'initialisation pour est triviale.
* Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie : .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang : .

, d’après la propriété c.

, par hypothèse de récurrence.

* Conclusion :

La propriété est vraie pour et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel , soit : .

e)

Donc :

f)

Propriétés :

a) est réel b) est imaginaire pur

Démonstrations :

Propriété : Soit un nombre complexe alors .

Démonstration :

Méthode : Déterminer un conjugué

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WhKHo9YwafE**](https://youtu.be/WhKHo9YwafE)

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

Méthode : Résoudre une équation dans

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qu7zGL5y4vI**](https://youtu.be/qu7zGL5y4vI)

Résoudre dans les équations suivantes : a) b)

a) b) On pose : . L’équation s’écrit alors :

Donc : et

Soit : et

D’où :

III. Formule du binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes et et pour tout entier naturel , on a :

Remarque : Les coefficients s’obtiennent à l’aide du triangle de Pascal.

Démonstration :

On procède par récurrence.

* Initialisation : Pour : et
* Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie :

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  :

Or, et

Donc :

Et, d’après la formule de Pascal, on a :

Car et

* Conclusion :

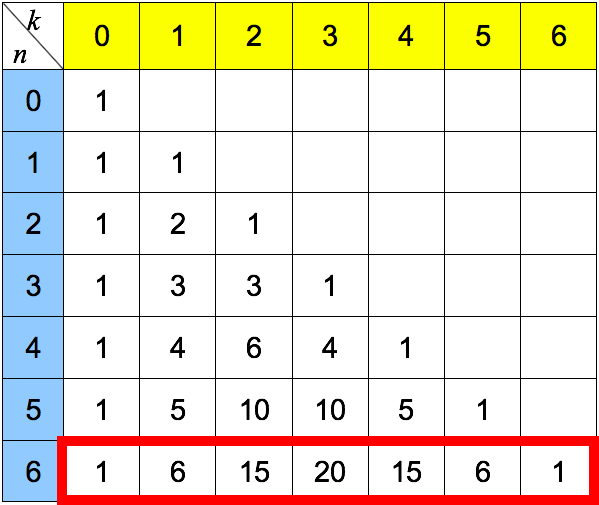
La propriété est vraie pour et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel .

Méthode : Appliquer la formule du binôme

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UsYH9PvppPo**](https://youtu.be/UsYH9PvppPo)

Développer l’expression .

On construit un triangle de Pascal :



On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.

Soit :

IV. Représentation dans le plan complexe

1) Définitions

Définitions : et sont deux nombres réels.

- À tout nombre complexe , on associe son **image**, le point de coordonnées et tout vecteur de coordonnées .

- À tout point et à tout vecteur, on associe le nombre complexe

appelé **affixe** du point et **affixe** du vecteur .

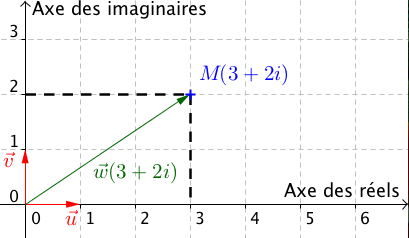
On note et

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/D\_yFqcCy3iE**](https://youtu.be/D_yFqcCy3iE)

Le point a pour affixe le nombre complexe .

De même, le vecteur a pour affixe .



2) Propriétés

Propriétés : et sont deux points du plan.

et sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur a pour affixe .

b) Le vecteur a pour affixe .

c) Le vecteur , réel, a pour affixe .

d) Le milieu du segment a pour affixe

Démonstrations :

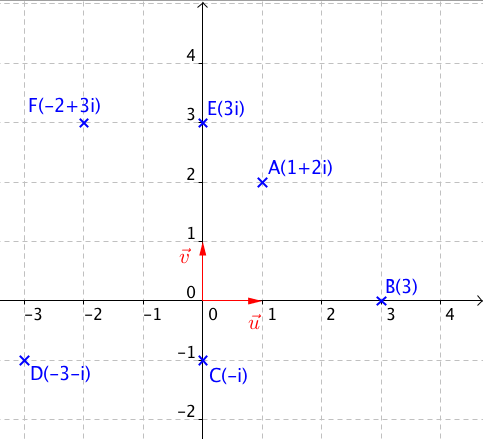
a) On pose : et .

Le vecteur a pour coordonnées donc son affixe est égal à :

.

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



Méthode : Utiliser l’affixe d’un point en géométrie

 **Vidéo** [**https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU**](https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU)

On considère les points , , , et .

1) Démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Calculer l’affixe de son centre.

2) Les points , et sont-ils alignés ?

1) - On va démontrer que les vecteurs et sont égaux.

Affixe de  :

Affixe de  :

Donc et donc est un parallélogramme.

- Le centre du parallélogramme est le milieu du segment . Son affixe est :

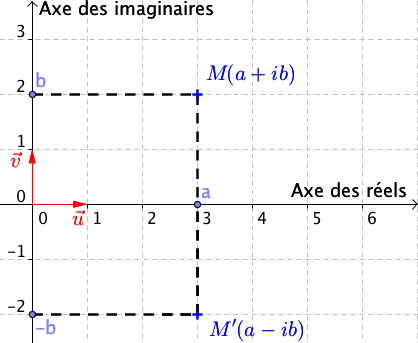
2) On ca démontrer que les vecteurs et sont colinéaires.

Affixe de  :

Affixe de  : .

Donc : et donc

Les vecteurs et sont colinéaires et donc les points , et sont alignés.



3) Image d’un conjugué

Remarque :

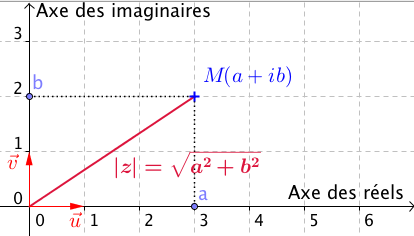
Les images et de et sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

V. Module et argument d’un nombre complexe

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe .

On appelle **module** de , le nombre réel positif, noté , égal à .



est un point d'affixe .

Alors le module de est égal à la distance .

Propriétés : Soit et deux nombres complexes.

a) b) c)

Démonstrations :

a)

b)

c)

Méthode : Calculer le module d’un nombre complexe

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4**](https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4)

Calculer : a) b)   c)

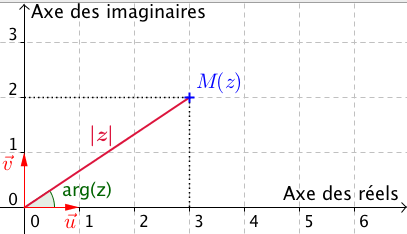
a) b)

c)

2) Argument

Définition : Soit un point d'affixe non nulle.

On appelle **argument** de , noté une mesure, en radians, de l'angle .

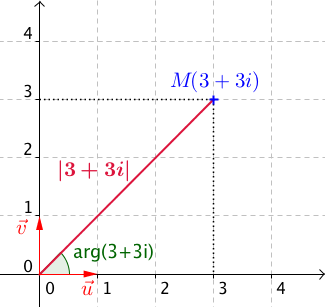


Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme , .

On notera modulo ou

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle n'est pas défini.

Exemple :

Soit .

Alors

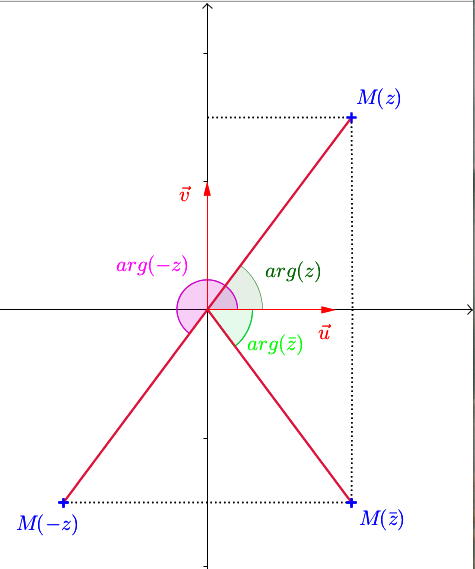
Propriétés : Soit un nombre complexe non nul.

a) est un nombre réel .

b) est un imaginaire pur .

c)

d)



Démonstrations :

a) Le point M d'affixe appartient à l'axe des réels.

b) Le point M d'affixe appartient à l'axe des imaginaires.

c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.

Méthode : Déterminer géométriquement un argument

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NX3pzPL2gwc**](https://youtu.be/NX3pzPL2gwc)

1) Déterminer un argument de chaque affixe

des points A, B et C.

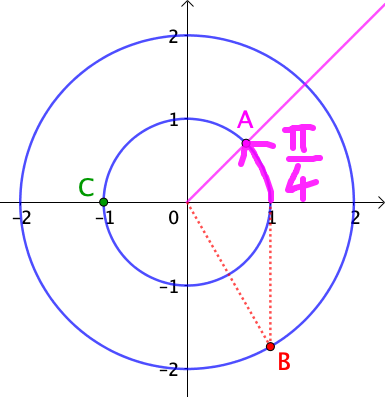
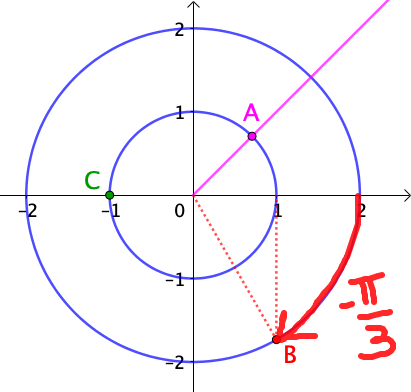
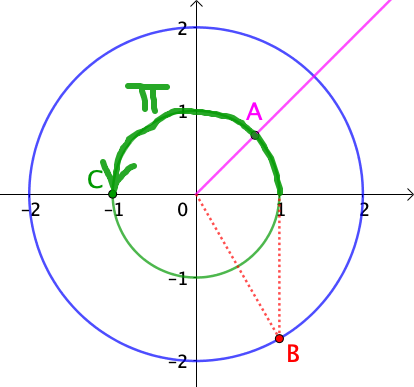
2) Placer les points D et E d’affixes respectives et

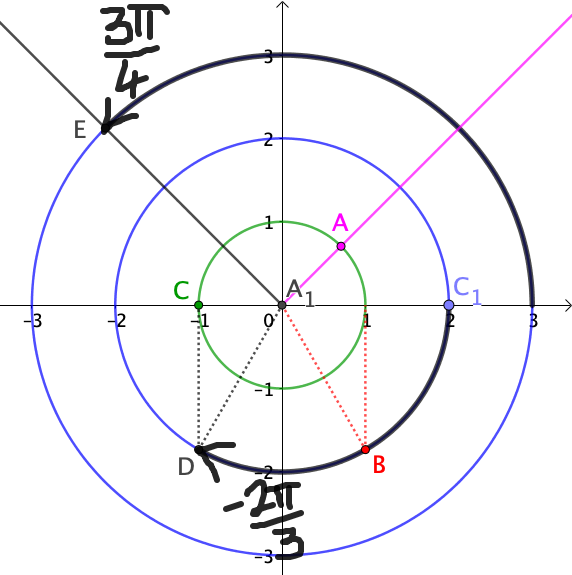
telles que :

et

et

1)



2) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car .

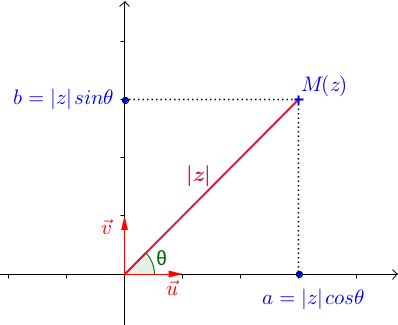
Le point E appartient au cercle de rayon 3 car .

VI. Forme trigonométrique d’un nombre complexe

1) Définition

Propriété : Soit un nombre complexe non nul. On pose :

On a alors : et .



En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe non nul l'écriture avec .

Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/kmb3-hNiBq8**](https://youtu.be/kmb3-hNiBq8)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zIbpXlgISc4**](https://youtu.be/zIbpXlgISc4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw**](https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw)

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

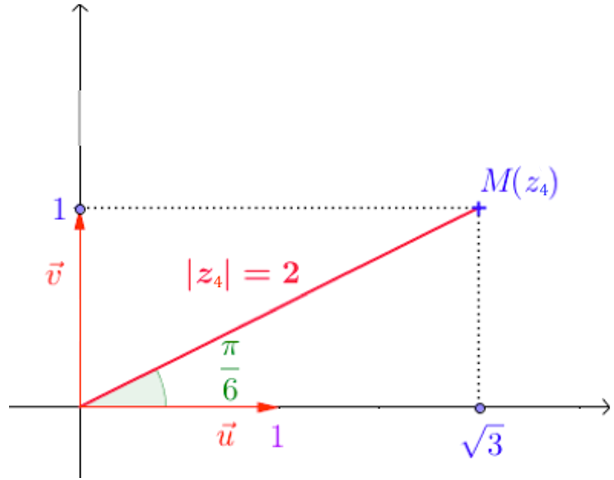
2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

Géométriquement (cercle trigo), on peut affirmer que : .

Donc : .

- On commence par calculer le module de :

- En calculant , on peut identifier plus facilement la partie réelle de et sa partie imaginaire :



On cherche donc un argument de tel que :

convient, en effet :

On a ainsi :

Et donc :

2) Propriétés

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Propriétés :  Soit et deux nombres complexes non nuls et entier naturel non nul. | | |
| Produit |  |  |
| Puissance |  |  |
| Inverse |  |  |
| Quotient |  |  |

Démonstration :

- Module d’un produit :

On pose et .

Donc le module de est .

- Module d’une puissance :

On procède par récurrence.

* L'initialisation pour est triviale.
* Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie : .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang :.

, d’après la propriété du produit.

, par hypothèse de récurrence.

* Conclusion :

La propriété est vraie pour et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel , soit : .

VII. Ensemble 𝕌 des nombres complexes de module 1

1) Cercle trigonométrique

L’ensemble des points du plan complexe  dont l’affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté 𝕌. Ce cercle s’appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit un nombre complexe appartenant à 𝕌.

On a alors

2) Stabilité de 𝕌

Méthode : Prouver que 𝕌 est stable par produit et passage à l’inverse

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTNKoNfFopw**](https://youtu.be/XTNKoNfFopw)

Soit et deux nombres complexes appartenant à 𝕌.

Démontrer que et appartiennent à 𝕌.

-

car et appartiennent à 𝕌.

Donc le produit a pour module 1 et appartient donc à 𝕌.

On dit que 𝕌 est stable par produit.

-

car appartient à 𝕌.

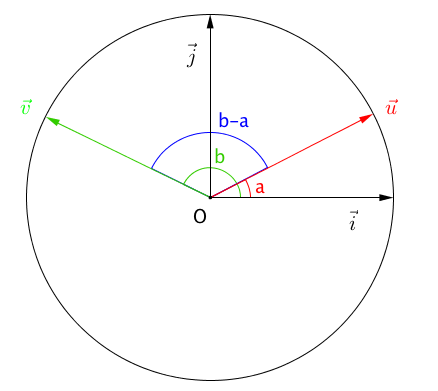
Donc l’inverse a pour module 1 et appartient donc à 𝕌.

On dit que 𝕌 est stable par passage à l’inverse.

VIII. Formules de trigonométrie

1) Formules d'addition

Propriété : Soit et deux nombres réels quelconques. On a :

Démonstrations :

**- 1ère formule :**

On considère un repère orthonormé du plan et le cercle trigonométrique de centre O.

et sont deux vecteurs de norme 1 tels que : et .

On a alors : et .

Ainsi :

On a également :

D'où :

**- 2e formule :**

**- 3e formule :**

**- 4e formule :**

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WcTWAazcXds**](https://youtu.be/WcTWAazcXds)

Calculer : et

2) Formules de duplication

Propriété : Soit un nombre réel quelconque. On a :

Démonstrations :

Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où :

On a également : donc :

Et :

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RPtAUl3oLco**](https://youtu.be/RPtAUl3oLco)

Calculer et

Donc :

et donc :

car est positif.

et donc :

car est positif.

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/yx3yULqR\_wI**](https://youtu.be/yx3yULqR_wI)

Résoudre dans l'équation .

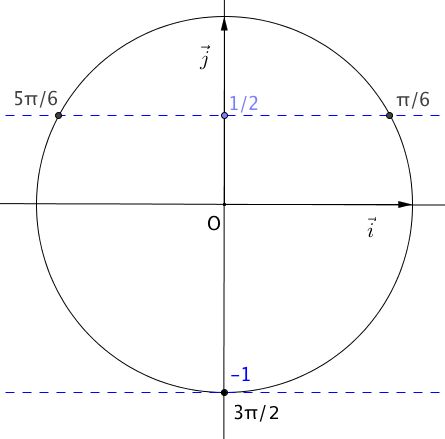
soit d’après une formule de duplication.

On pose , l'équation s'écrit alors :

Soit :

L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :

Résolvons alors dans les équations : et :



Ainsi :

IX. Forme exponentielle d’un nombre complexe

1) Définition

Posons .

En prenant , on a démontré dans la Partie 3 (III.) que :

Soit : .

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : .

Définition : Pour tout réel , on a : .

Remarque :

est le nombre complexe de module 1 et d'argument .

Propriété :

Démonstration :



Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre *e*), l'algèbre (avec le nombre *i*) et la géométrie (avec le nombre ).

Exemples :

Définition : Tout nombre complexe non nul de module et d'argument s'écrit sous sa **forme exponentielle** .

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WSW6DIbCS\_0**](https://youtu.be/WSW6DIbCS_0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/tEKJVKKQazA**](https://youtu.be/tEKJVKKQazA)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zdxRt5poJp0**](https://youtu.be/zdxRt5poJp0)

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

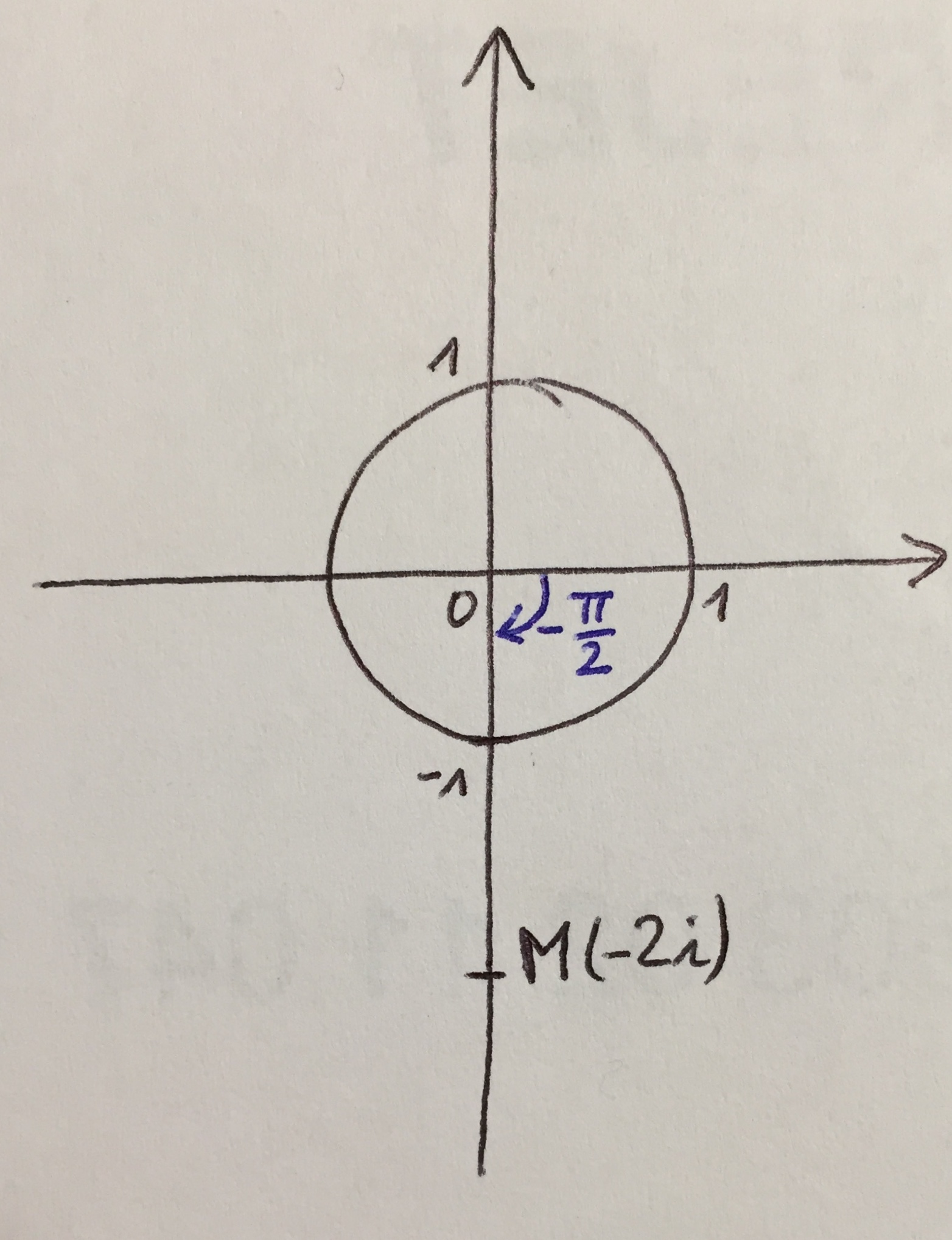
a) b) c)

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) b)

1) a) -

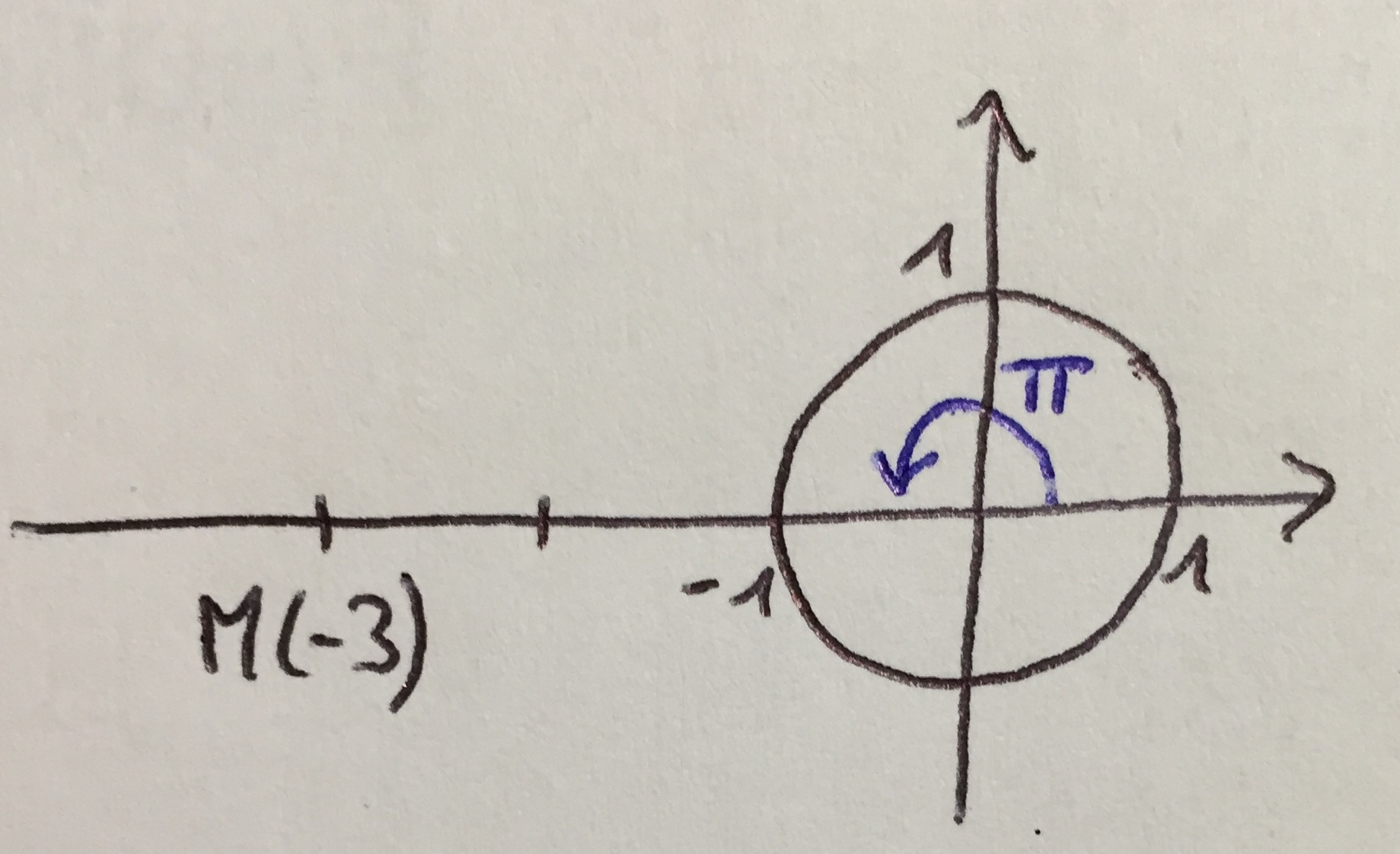
- Pour déterminer un argument de , on peut utiliser le cercle trigonométrique.

On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point d’affixe et on lit graphiquement qu’un argument de est .

Ainsi, on a : .

b) -

- On place le point d’affixe et on lit graphiquement qu’un argument de est .



Ainsi, on a : .

c)

- Il n’est pas évident de déterminer graphiquement un argument de . La méthode consiste alors à calculer  :

On cherche donc un argument de tel que :

Comme, on a :

L'argument convient. Et ainsi :

Soit :

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels  et ,

a) b) c) d)

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8EVfyqyVBKc**](https://youtu.be/8EVfyqyVBKc)

1) Déterminer la forme exponentielle de .

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) b) c)

1)

2) a)

b)

c) =

3) Formules de Moivre et d’Euler

Formule de Moivre : Pour tous réels  et , pour tout entier naturel non nul :

Que l’on peut également écrire :

Méthode : Appliquer la formule de Moivre

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik**](https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik)

Exprimer en fonction de .

Or, selon la formule de Moivre :

, en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit :

On en déduit que :

Or, , donc :

Formules d’Euler : Pour tous réels  et  :

Méthode : Appliquer les formules d’Euler

 **Vidéo** [**https://youtu.be/p6TncUjPKfQ**](https://youtu.be/p6TncUjPKfQ)

1) Linéariser (\*) l’expression.

2) En déduire une primitive de la fonction .

(\*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d’expressions du type et

1) On applique une formule d’Euler :

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

2) Ainsi, chercher une primitive de revient à chercher une primitive de .

Une primitive de la fonction est la fonction :

X. Applications des nombres complexes à la géométrie

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé direct .

Propriété : , et sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives et . On a :

Démonstrations :

a) On considère un point tel que .

Alors a pour affixe .

Donc et donc .

b)

Comme , donc

c)

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NjLZfbqRFB0**](https://youtu.be/NjLZfbqRFB0)

Soit , et trois points d'affixes respectives , et

.

1) Démontrer que le triangle est isocèle en .

2) Démontrer que le triangle est rectangle en .

Donc = .

On en déduit que l'angle est droit.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTXu19XC9Lw**](https://youtu.be/WTXu19XC9Lw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5puq7tzMZAo**](https://youtu.be/5puq7tzMZAo)

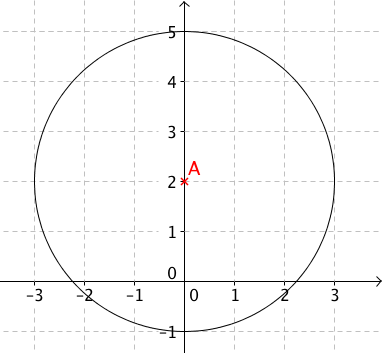
Soit un point d’affixe . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

1) L’ensemble des points tels que .

2) L’ensemble des points tels que .

3) L’ensemble des points tels que .

4) L’ensemble des points tels que .

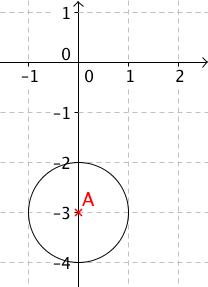
5) L’ensemble des points tels que .

1) Soit le point d’affixe alors s’écrit :

. En effet : .

L’ensemble des points est le cercle de centre et

de rayon 3.



2)

Soit le point d’affixe alors s’écrit .

En effet : .

L’ensemble des points est le cercle de centre et de rayon 1.

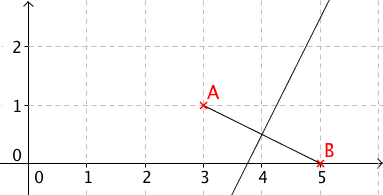
3)

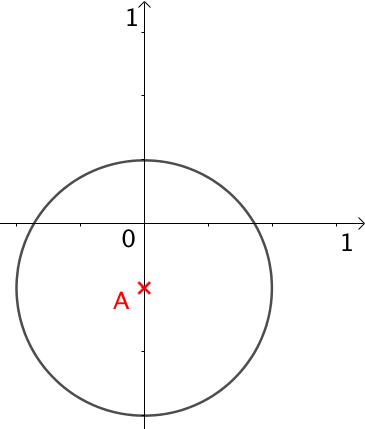
Soit le point d’affixe et le point d’affixe 5 alors

s’écrit .

L’ensemble des points est la médiatrice du

segment



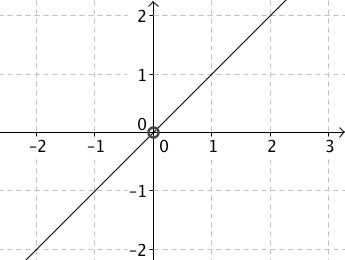
4) .

Soit , en notant que .

Soit encore :

On pose , alors l’équation s’écrit :

L’ensemble des points est le cercle de centre et de rayon .

5) L’ensemble des points M est la 1ère bissectrice de l’axe

des abscisses et de l’axe des ordonnées privée de

l’origine.

XI. Racine n-ième de l’unité

1) Détermination de l’ensemble

On cherche à déterminer l’ensemble des nombres complexes vérifiant l’égalité avec

Définition : Une **racine -ième de l’unité** est un nombre complexe vérifiant avec

Théorème : L’ensemble des racines de l’unité possède exactement racines :

, avec entier compris entre et .

Démonstration :

Existence :

Si alors et donc .

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme , avec .

Soit :

, avec .

, avec .

On peut ainsi restreindre les valeurs prisent par à l’ensemble des entiers compris entre et .

Donc , avec entier compris entre et , est une racine de l’unité.

Unicité :

Supposons qu’il existe entier compris entre et , tel que

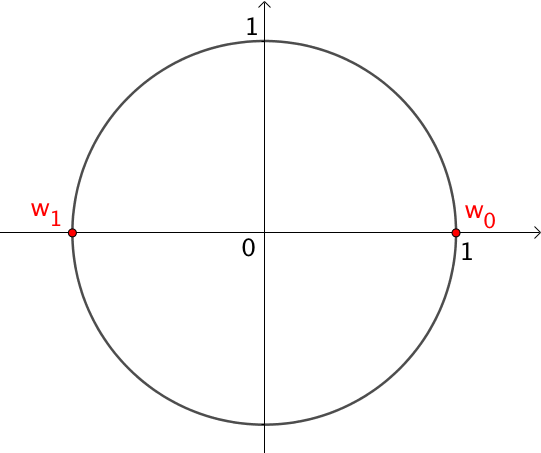
Alors :

, avec .

Donc divise .

Or est un entier compris entre et . Donc ne peut pas diviser .

Et donc . Soit .

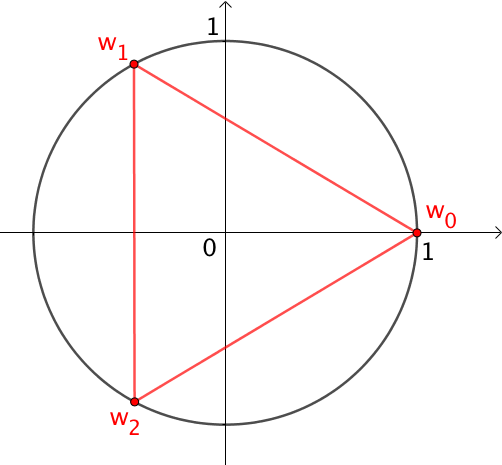


2) Représentation géométrique

a) Cas  :

Si on applique le théorème ci-dessus, les racines de l’équation sont :

On peut ainsi représenter les racines 2-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines n-ième de l’unité ont pour module 1.

 b) Cas  :

Les racines de l’équation sont :

, ,

On peut ainsi représenter les racines 3-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique.

Par convention, on note habituellement :

et .

L’ensemble des points dont les images sont les racines 3-ième de l’unité forment un triangle équilatéral.

c) Cas  :

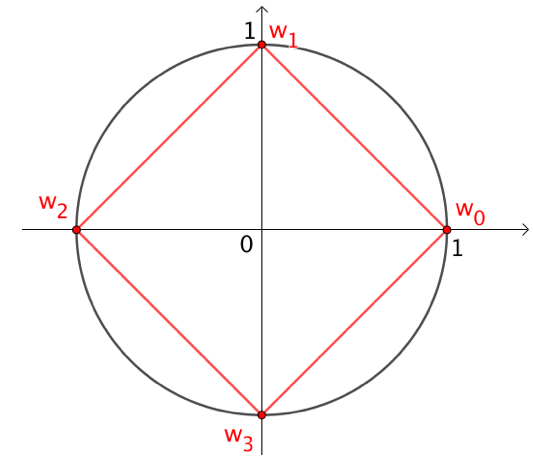
Les racines de l’équation sont :

, , ,

.

On peut ainsi représenter les racines 4-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique.

L’ensemble des points dont les images sont les racines 4-ième de l’unité forment un carré.



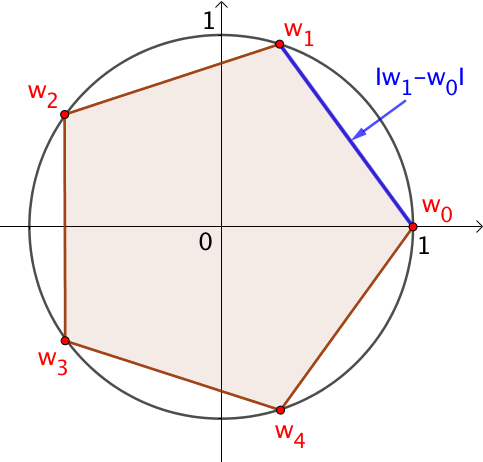
De façon générale, l’ensemble des points dont les images sont les racines n-ième de l’unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.

Méthode : Utiliser les racines de l’unité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cqK\_IGw\_0fE**](https://youtu.be/cqK_IGw_0fE)

Démontrer que le périmètre d’un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à .

Les images des racines 5-ième de l’unité forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Ainsi pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d’un côté du pentagone.

Soit par exemple :

Soit, en appliquant une formule d’Euler :

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à .

XII. Équations du second degré dans

Définition : Soit , et *c* des réels avec .

On appelle **discriminant** du trinôme , le nombre réel, noté , égal à

.

Propriété :

- Si > 0 : L'équation a deux solutions réelles distinctes :

et .

- Si = 0 : L'équation a une unique solution réelle : .

- Si < 0 : L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

et .

Démonstration :

On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1ère) :

En posant :

- Si > 0 :

L'équation a deux solutions réelles : et .

- Si = 0 : L'équation peut s'écrire :

L'équation n'a qu'une seule solution réelle : .

- Si < 0 : L'équation peut s'écrire :

Donc :

L'équation a deux solutions complexes : et .

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KCnorHy5FE4**](https://youtu.be/KCnorHy5FE4)

Résoudre dans les équations suivantes : a) b)

a)

Donc : ou

Les solutions sont donc et .

b) 

On calcule de discriminant du trinôme :

donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

et

Propriété : La somme *S* et le produit *P* des racines d’un polynôme du second degré de la forme sont donnés par : et .

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que l’équation possède deux racines : et .

Ainsi : et

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :

XIII. Équations de degré n dans

1) Définition

Définition : Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) est une fonction de dans de la forme , où , , , …, sont les **coefficients** réels de .

L’entier est appelé le **degré** du polynôme .

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

2) Racine d’un polynôme

Définition : Soit un polynôme . Un nombre complexe s’appelle **racine** de si

Exemple :

Les nombres complexes et sont les racines du polynôme .

Théorème : Soit un polynôme définie par où est un entier supérieur ou égal à 2.

Alors il existe un polynôme de degré , tel que

Démonstration :

- Si  : C’est évident.

- Si  :

On a :

En soustrayant membre à membre, on a :

- Si  quelconque :

On remplace par dans l’égalité ci-dessus :

Soit en multipliant chaque membre par  :

Il existe donc un polynôme de degré , tel que .

Corollaire : Soit un polynôme de degré . Si est une racine complexe de , alors il existe un polynôme de degré tel que .

Démonstration :

Comme est une racine complexe de , on a :

Donc :

Or, pour tout compris entre 1 et , il existe un polynôme de degré , tel que : .

Donc :

Il existe donc un polynôme de degré , tel que : .

Méthode : Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KqghKmQ9gOk**](https://youtu.be/KqghKmQ9gOk)

Résoudre dans l’équation .

On pose

On voit que est une racine évidente de . Donc il existe un polynôme , de degré 2, tel que : .

On a donc :

Ainsi, en procédant par identification, on a :

soit

Donc :

L’équation peut s’écrire .

Soit : ou

ou

Corollaire : Un polynôme de degré admet au plus racines.

Démonstration :

Supposons que les nombres complexes …, sont des racines deux à deux distincts du polynôme .

Alors il existe un polynôme tel que : .

Or, et .

Donc

Ainsi, il existe un polynôme tel que : .

Et donc :

En continuant ainsi avec des polynômes … , on obtient :

On en déduit que le polynôme est de degré .

Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1Y-JtI6nNXU**](https://youtu.be/1Y-JtI6nNXU)

Factoriser dans le polynôme : .

est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.

On cherche une racine évidente de en testant des valeurs entières « autour de 0 ».

Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.

On constate que est une racine évidente de  :

Donc, il existe un polynôme de degré 2, tel que : .

On a donc :

Ainsi, en procédant par identification, on a :

soit

On en déduit que : .

Or, il est possible de factoriser  :

En effet :

On a ainsi : .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)