SECOND DEGRÉ

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction *f* définie sur par une expression de la forme :

où les coefficients *a*, *b* et *c* sont des réels donnés avec .

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

-

-

-

- sont des fonctions polynômes de degré 2.

- est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OQHf-hX9JhM**](https://youtu.be/OQHf-hX9JhM)

Soit la fonction *f* définie sur par : .

On veut exprimer la fonction *f* sous sa forme canonique :

☺(*x* ☺)2 + ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

car est le début du développement de

et

est la forme canonique de *f*.

Propriété :

Toute fonction polynôme *f* de degré 2 définie sur par peut s'écrire sous la forme :

, où et sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de *f*.

Démonstration :

Comme , on peut écrire pour tout réel *x* :

avec et .

Remarque : Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d’utiliser les deux dernières formules donnant 𝛼 et 𝛽… à condition de les connaître !

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

Alors : car est positif.

Or donc pour tout x, .

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie par , avec

.

- Si , *f* admet un minimum pour . Ce minimum est égal à .

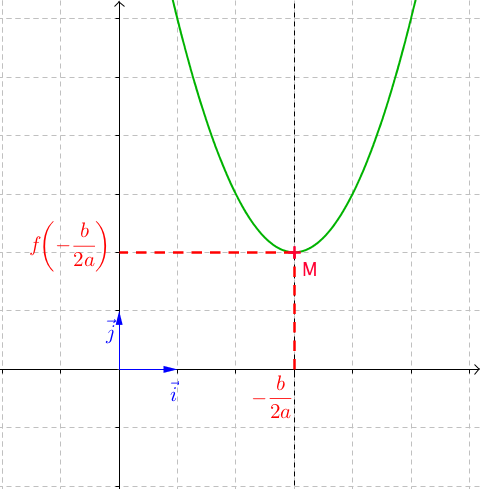
- Si , *f* admet un maximum pour. Ce maximum est égal à .

Remarque :

Soit la fonction *f* définie sur par : , avec .

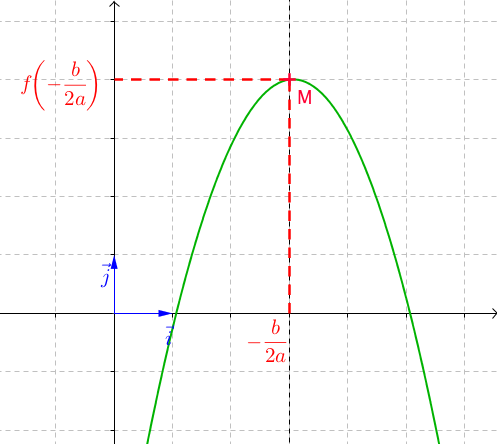
On peut retenir que *f* admet un maximum (ou un minimum) pour .

*(voir résultat de la démonstration dans II.)*



* Si :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| *f* |  |



* Si :

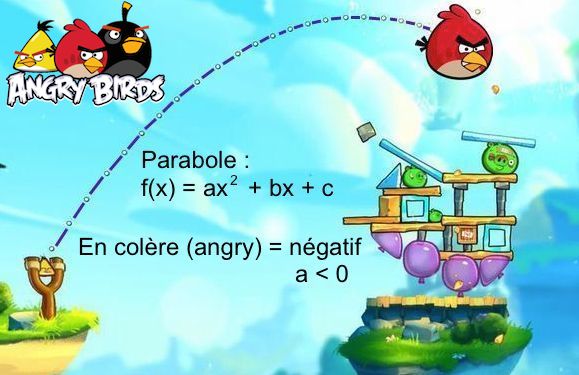
|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| *f* |  |

Dans un repère orthogonal , la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

Le point M de coordonnées est le **sommet** de la parabole.

Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction *f*.

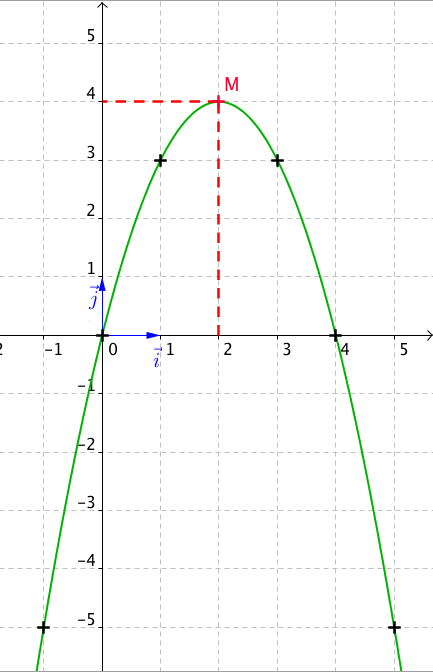
La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation .



Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

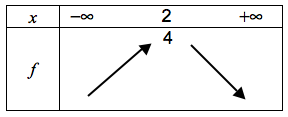
 **Vidéo** [**https://youtu.be/KK76UohzUW4**](https://youtu.be/KK76UohzUW4)

Représenter graphiquement la fonction *f* définie sur par .

Commençons par écrire la fonction *f* sous sa forme canonique :

*f* admet donc un maximum en 2 égal à

Les variations de *f* sont donc données par

le tableau suivant :

On obtient la courbe représentative de *f* ci-contre.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d’une parabole

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7IOCVfUnoz0**](https://youtu.be/7IOCVfUnoz0)

Déterminer l’axe de symétrie et le sommet de la parabole d’équation

.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation , soit = 3.

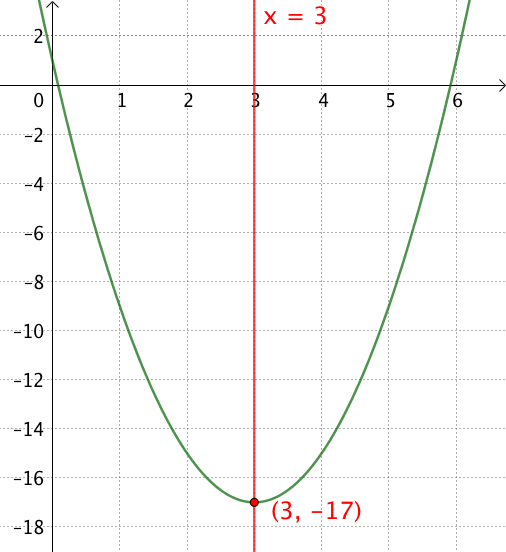
La droite d’équation est donc axe de symétrie de la parabole d’équation

.

- Les coordonnées de son sommet sont : , soit :

Le point de coordonnées est donc le sommet de la parabole.

, ce sommet correspond à un minimum.



IV. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme

où *a*, *b* et *c* sont des réels avec .

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme .

Exemple :

L'équation est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme , le nombre réel, noté Δ, égal à .

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme .

- Si Δ < 0 : L'équation n'a pas de solution réelle.

- Si Δ = 0 : L'équation a une unique solution : .

- Si Δ > 0 : L'équation a deux solutions distinctes :

et .

*Propriété démontrée dans le paragraphe II.*

Méthode : Résoudre une équation du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/youUIZ-wsYk**](https://youtu.be/youUIZ-wsYk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RhHheS2Wpyk**](https://youtu.be/RhHheS2Wpyk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/v6fI2RqCCiE**](https://youtu.be/v6fI2RqCCiE)

Résoudre les équations suivantes :

a) b) c)

a) Calculons le discriminant de l'équation :

*a* = 2, *b* = –1 et *c* = –6 donc Δ = = (–1)2 – 4 x 2 x (–6) = 49.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

b) Calculons le discriminant de l'équation :

*a* = 2, *b* = –3 et *c* =  donc Δ = = (–3)2 – 4 x 2 x  = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

c) Calculons le discriminant de l'équation :

*a* = 1, *b* = 3 et *c* = 10 donc Δ = = 32 – 4 x 1 x 10 = –31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d’un polynôme du second degré de la forme sont donnés par : et .

Exercice : Démontrer ces deux formules.

V. Factorisation d'un trinôme

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7VFpZ63Tgis**](https://youtu.be/7VFpZ63Tgis)

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction *f* définie sur par peut s'écrire sous sa forme canonique :

avec et .

Donc :

peut s’écrire :

car *a* est non nul.

* Si Δ < 0 : Comme un carré ne peut être négatif , l'équation

n'a pas de solution.

* Si Δ = 0 : L'équation peut s'écrire :

L'équation n'a qu'une seule solution : 

* Si Δ > 0 : L'équation est équivalente à :

ou

ou

ou

ou

L'équation a deux solutions distinctes : ou

Propriété : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur  par

.

- Si Δ = 0 : Pour tout réel *x*, on a : .

- Si Δ > 0 : Pour tout réel *x*, on a : .

Remarque : Si Δ < 0, il n’existe pas de forme factorisée de *f*.

Méthode : Factoriser un trinôme

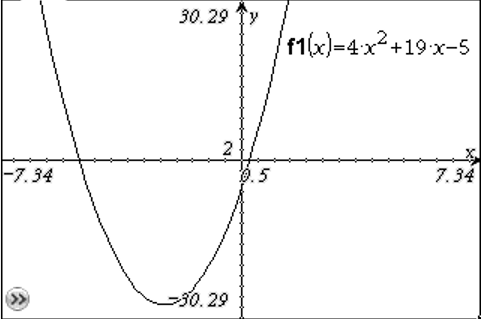
 **Vidéo** [**https://youtu.be/eKrZK1Iisc8**](https://youtu.be/eKrZK1Iisc8)

Factoriser les trinômes suivants : a) b)

a) On cherche les racines du trinôme :

Calcul du discriminant : Δ = 192 – 4 x 4 x (–5) = 441

Les racines sont : = –5 et =

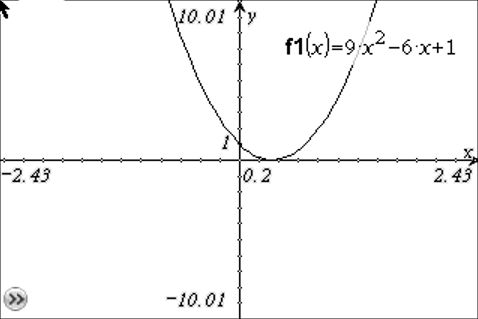


On a donc :

.

*Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !*

*On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.*



b) On cherche les racines du trinôme :

Calcul du discriminant : Δ = (–6)2 – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : =

On a donc :

.

Exercice d’approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l'équation (E) :

- On commence par factoriser les expressions et .

Le discriminant de est Δ = (–3)2 – 4 x 2 x (–2) = 25 et ses racines sont :

= et =

On a donc : . .

Le discriminant de est Δ' = 132 – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :

= –6 et =

On a donc : . .

- L'équation (E) s'écrit alors :

Les valeurs –6, et 2 annulent les dénominateurs. On résout alors (E) sur

:

(E) s'écrit :

car et .

Le discriminant de est Δ'' = 12 – 4 x (–1) x 6 = 25.

Les racines sont : = 3 et = –2

Les solutions de l'équation (E) sont : –2 et 3.

VI. Signe d'un trinôme

 **Vidéo** [**https://youtu.be/sFNW9KVsTMY**](https://youtu.be/sFNW9KVsTMY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q**](https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JCVotquzIIA**](https://youtu.be/JCVotquzIIA)

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par :

- si *a* > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut :

- si *a* < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas :

Propriété : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur par

.

*a* > 0

*a* < 0

- Si Δ < 0 :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| *f*(*x*) | Signe de *a* |

- Si Δ = 0 :

*a* > 0

*a* < 0

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| *f*(*x*) | Signe de *a* OSigne de *a* |

- Si Δ > 0 :

*a* > 0

*a* < 0

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| *f*(*x*) | Signe de *a* OSigne opposé O Signe de *a*  de *a* |

Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AEL4qKKNvp8**](https://youtu.be/AEL4qKKNvp8)

Résoudre l’inéquation :

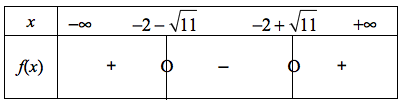
*On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.*

équivaut à .

Le discriminant de est Δ = 42 – 4 x 1 x (–7) = 44 et ses racines sont :

et

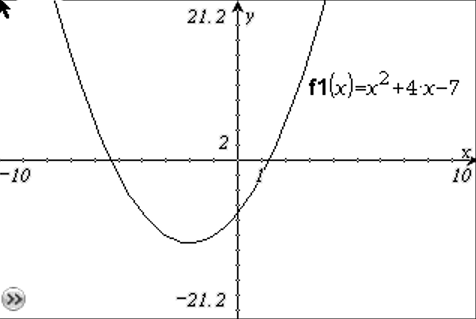
On obtient le tableau de signes :



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc .

*Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !*

*On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.*



Exercice d’approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l’inéquation

équivaut à

Soit :

Soit encore :

- On commence par déterminer les racines du trinôme :

Le discriminant est Δ = (–1)2 – 4 x 1 x (–6) = 25 et ses racines sont :

et

Les valeurs –2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans

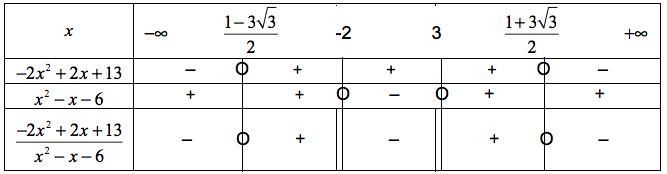
.

- On détermine les racines du trinôme :

Le discriminant est Δ' = 22 – 4 x (–2) x 13 = 108 et ses racines sont :

et

- On obtient le tableau de signe :



L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

VII. Application : position relative de deux courbes

Méthode : Étudier la position de deux courbes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EyxP5HIfyF4**](https://youtu.be/EyxP5HIfyF4)

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur par : et .

Étudier la position relative des courbes représentatives et .

On va étudier le signe de la différence :

.

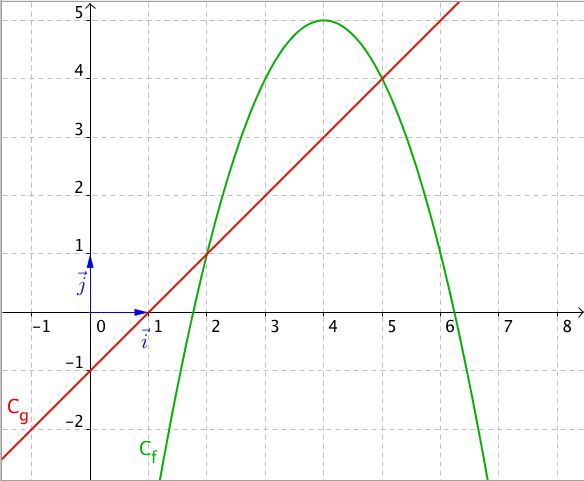
Le discriminant du trinôme est Δ = 72 – 4 x (–1) x (–10) = 9

Le trinôme possède deux racines distinctes :

et

On dresse le tableau de signes du trinôme :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 2 5 |
|  | – O + O – |



On conclut :

La courbe est en-dessous de la courbe pour tout *x* de

.

La courbe est au-dessus de la courbe pour tout *x* de .

VIII. Fonction polynôme de degré 3

1) Exemples et contre-exemples

-

- sont des fonctions polynômes de degré 3.

-

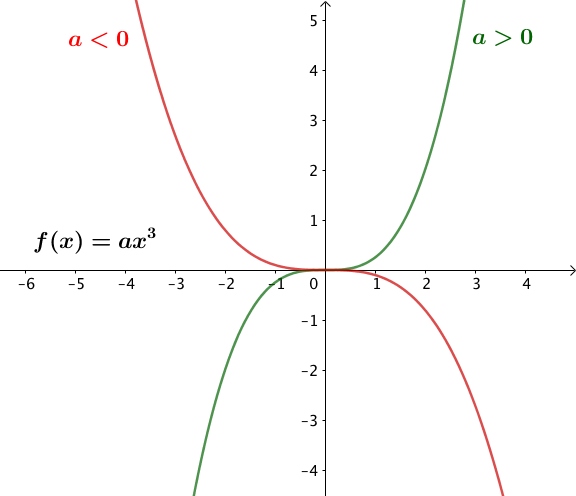
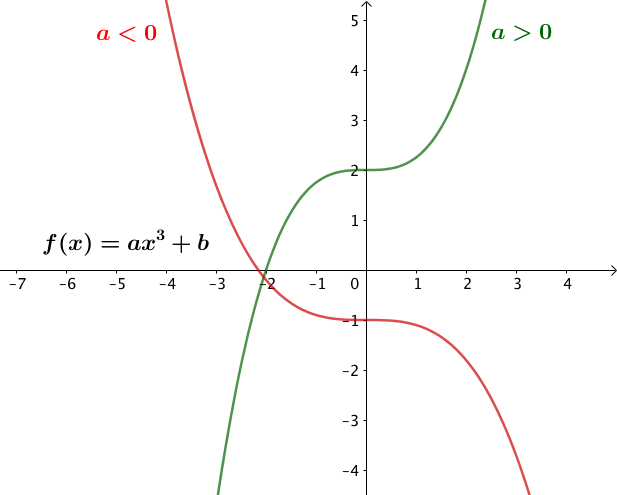
- est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur par ou sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Les coefficients *a* et *b* sont des réels donnés avec .

2) Représentation graphique



Propriétés :

Soit *f* une fonction polynôme de degré 3, telle que.

- Si *a* < 0 : *f* est strictement croissante.

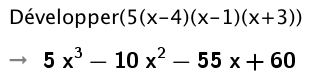
- Si *a* < 0 : *f* est strictement décroissante.

3) Forme factorisée d’une fonction polynôme de degré 3

Exemple :

La fonction *f* définie par est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.

Si on développe l’expression de *f* à l’aide d’un logiciel de calcul formel, on obtient bien l’expression de degré 3 :



Définition : Les fonctions définies sur ℝ par sont des fonctions polynômes de degré 3.

Les coefficients *a*, *x1*, *x2* et *x3* sont des réels avec .

En partant de l’expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et –3 sont des racines du polynôme *f*.

4, 1 et –3, solutions de l’équation , sont donc des racines de *f*.

Propriété : Soit la fonction *f* définie sur ℝ par .

L’équation possède trois solutions (éventuellement égales) :, et appelées les **racines** de la fonction polynôme *f*.

Méthode : Étudier le signe d’un polynôme de degré 3

 **Vidéo** [**https://youtu.be/g0PfyqHSkBg**](https://youtu.be/g0PfyqHSkBg)

Étudier le signe de la fonction polynôme *f* définie sur ℝ par :

2 étant un nombre positif, le signe de dépend du signe de chaque facteur : *x* + 1, *x* – 2 et *x* – 5.

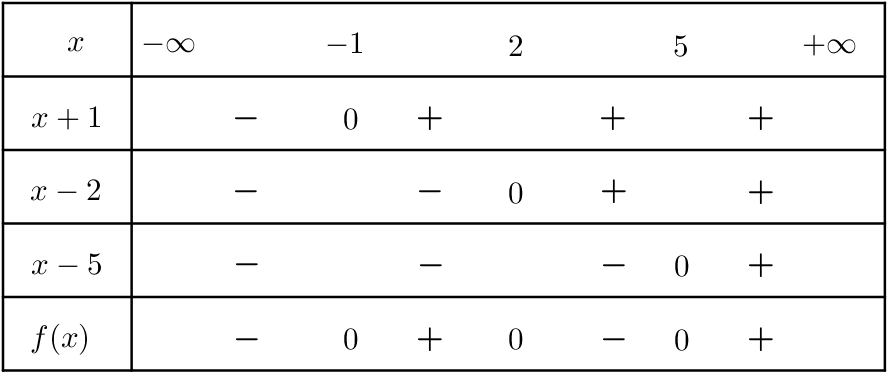
On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

*x* + 1 = 0 ou *x* – 2 = 0 ou *x* – 5 = 0

*x* = –1 *x* = 2 *x* = 5

–1, 2 et 5 sont donc les racines du polynôme *f.*

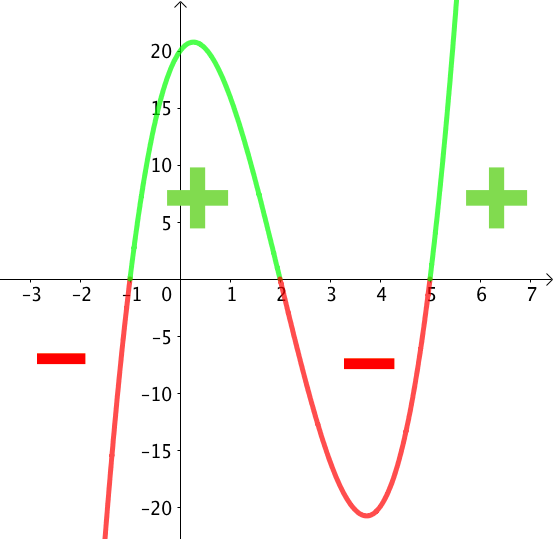
En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit .



On en déduit que pour et

pour .

La représentation de la fonction *f* à l’aide d’un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.





Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)