FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



I. Rappels sur cosinus et sinus

1. Définitions :

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel *x*, considérons le point N de la droite orientée d’abscisse *x*.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l’axe des abscisses et à l’axe des ordonnées passant par M.

Définitions :

- Le **cosinus** du nombre réel*x* est l’abscisse de M et on notecos*x*.

- Le **sinus** du nombre réel *x* est l’ordonnée de M et on note sin*x*.

Propriétés :

Pour tout nombre réel $x$, on a :

1) $-1\leq \cos(x)\leq 1$ 2) $-1\leq \sin(x)\leq 1$ 3) cos2 *x* + sin2 *x* = 1

1. Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | $$\frac{π}{6}$$ | $$\frac{π}{4}$$ | $$\frac{π}{3}$$ | $$\frac{π}{2}$$ | π |
| $$\cos(x)$$ | 1 | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | -1 |
| $$\sin(x)$$ | 0 | $$\frac{1}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | 1 | 0 |

II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

 1) Périodicité

Propriétés :

1) $\cos(x)=\cos(\left(x+2kπ\right))$ où *k* entier relatif 2) $\sin(x)=\sin(\left(x+2kπ\right)) $où *k* entier relatif

Démonstration :

Aux points de la droite orientée d'abscisses *x* et $x+2kπ$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2π$.

Conséquence :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur $2π$ et de la compléter par translation.

Méthode : Résoudre une équation et une inéquation trigonométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/p6U55YsS440**](https://youtu.be/p6U55YsS440)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PcgvyxU5FCc**](https://youtu.be/PcgvyxU5FCc)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/raU77Qb\_-Iw**](https://youtu.be/raU77Qb_-Iw)

1) Résoudre dans $R$ l'équation : $cos^{2}x=$ $\frac{1}{2}$ .

2) Résoudre dans $\left[-π ; π\right]$, l’inéquation : $\sin(x)\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1) $cos^{2}x=$ $\frac{1}{2}$

$cos^{2}x-$ $\frac{1}{2}$ $=0$

$$\left(\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

En effet : $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1×\sqrt{2}}{\sqrt{2}×\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc :

$$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} ou \cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit :

$$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{π}{4}+2k\_{1}π, k\_{1}\in Z \\x=-\frac{π}{4}+2k\_{2}π, k\_{2}\in Z\end{array} ou \left\{\begin{array}{c}x=\frac{3π}{4}+2k\_{3}π, k\_{3}\in Z \\x=-\frac{3π}{4}+2k\_{4}π, k\_{4}\in Z\end{array}\right.\right.$$

$$S=\left\{\frac{π}{4}+\frac{kπ}{2}, k\in Z\right\}$$

2) $\sin(x)\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

- On commence par résoudre l’équation $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\left[-π ; π\right].$

Soit : $x=\frac{π}{3}$ ou $x=\frac{2π}{3}$.



- On utilise le cercle trigonométrique pour

conclure sur les solutions de l’inéquation

$\sin(x)\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cela correspond à la zone du cercle

situées en dessous de la droite passant

par les points du cercle correspondant

aux valeurs $\frac{π}{3}$ et $\frac{2π}{3}$.

Ainsi :

$$S=\left[-π ; \frac{π}{3}\right]∪\left[\frac{2π}{3} ; π\right]$$

2) Parité

Propriétés :

Pour tout nombre réel *x*, on a :

1) $\cos(\left(-x\right))=\cos(x)$

2) $\sin(\left(-x\right))=-\sin(x)$

Remarque :

On dit que la fonction cosinus est paire et que la

fonction sinus est impaire.

Rappels : Une fonction *f* est **paire** lorsque pour tout réel *x* de son ensemble de définition *D*, *–x* appartient à *D* et $f\left(-x\right)=f(x)$.

Une fonction *f* est **impaire** lorsque pour tout réel *x* de son ensemble de définition *D*,

*–x* appartient à *D* et $f\left(-x\right)=-f(x)$.

Conséquences :

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Etudier la parité d'une fonction trigonométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/hrbgxnCZW\_I**](https://youtu.be/hrbgxnCZW_I)

Démontrer que la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\sin(x)-\sin(\left(2x\right))$ est impaire.

Pour tout *x* réel, on a :

$f\left(-x\right)=\sin(\left(-x\right))-\sin(\left(-2x\right))=-\sin(x)+\sin(\left(2x\right))=-f(x)$.

La fonction *f* est donc impaire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

III. Dérivabilité et variations

 1) Dérivabilité

Théorème : Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $R$ et on a :

$\left(cos(x)\right)' = –sin(x)$ et $\left(sin(x)\right)' = cos(x)$

Remarque : $\left(cos(x)\right)'$ se note également $cos^{'}\left(x\right)$

 2) Variations

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 $π$ |
| $$cos^{'}\left(x\right)=-\sin(x)$$ | 0 $-$ 0 |
| $$\cos(x)$$ | 1 –1  |

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 $\frac{π}{2}$ $π$ |
| $$sin^{'}\left(x\right)=\cos(x)$$ | 1 + 0 – –1 |
| $$\sin(x)$$ |  10 0 |

 3) Représentations graphiques



*Fonction cosinus*



*Fonction sinus*

Méthode : Etudier une fonction trigonométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/uOXv5XnAiNk**](https://youtu.be/uOXv5XnAiNk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/s3S85RL06ks**](https://youtu.be/s3S85RL06ks)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/X6vJog\_xQRY**](https://youtu.be/X6vJog_xQRY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ol6UtCpFDQM**](https://youtu.be/ol6UtCpFDQM)

On considère la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\cos(\left(2x\right)-)$ $\frac{1}{2}$ .

1) Etudier la parité de *f.*

2) Démontrer que la fonction *f* est périodique de période $π$.

3) Etudier les variations de *f* sur $\left[0 ; \frac{π}{2}\right]$.

4) Représenter graphiquement la fonction *f* sur $\left[0 ; \frac{π}{2}\right]$ et prolonger de part et d’autre la représentation par symétrie et par translation.

1) Pour tout *x* de $R$, on a : $f\left(-x\right)=\cos(\left(-2x\right)-)$ $\frac{1}{2}$ $=\cos(\left(2x\right)-)$ $\frac{1}{2}$ $=f\left(x\right)$

La fonction *f* est donc paire. Dans un repère orthogonal, sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Pour tout *x* de $R$, on a :

$f\left(x+π\right)=\cos(\left(2\left(x+π\right)\right)-)$ $\frac{1}{2}$

$ =\cos(\left(2x+2π\right)-)$ $\frac{1}{2}$

$ =\cos(\left(2x\right)-)$ $\frac{1}{2} =f(x)$

On en déduit que la fonction *f* est périodique de période $π$.

3) On pose : $u\left(x\right)=2x \rightarrow u^{'}\left(x\right)=2$

 $v\left(x\right)=\cos(x) \rightarrow v^{'}\left(x\right)=-\sin(x)$

$$f\left(x\right)=v\left(u\left(x\right)\right)-\frac{1}{2}$$

Donc : $f'\left(x\right)=u'(x)×v'\left(u\left(x\right)\right)$

$$f^{'}(x)=2×\left(-\sin(\left(2x\right))\right)=-2\sin((2x))$$

Si $x\in \left[0 ; \frac{π}{2}\right]$, alors $2x\in \left[0 ; π\right]$ et donc $\sin((2x))\geq 0$.

Donc si $x\in \left[0 ; \frac{π}{2}\right]$, alors $f^{'}(x)\leq 0$. Ainsi *f* est décroissante sur $\left[0 ; \frac{π}{2}\right]$.

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 $\frac{π}{2}$ |
| $$f^{'}(x)$$ | 0 – 0 |
| $$f(x)$$ | $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ |

4) - On commence par tracer la courbe sur l’intervalle $\left[0 ; \frac{π}{2}\right]$.

- La fonction *f* est paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut ainsi prolonger la courbe par symétrie axiale sur l’intervalle $\left[-\frac{π}{2} ; 0\right]$.

- La fonction *f* est périodique de période $π$, on peut ainsi prolonger la courbe en translatant horizontalement la portion de courbe déjà tracée. En effet, la portion déjà tracée se trouve sur l’intervalle $\left[-\frac{π}{2} ; \frac{π}{2}\right]$ de longueur $π$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)