INTÉGRATION

I. Primitive d'une fonction continue

1) Primitive d’une fonction

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

 et

On constate que .

On dit dans ce cas que est une primitive de *f* sur .

Définition : *f* est une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive** de *f* sur I, une fonction *F* dérivable sur I telle que

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

« *F* a pour dérivée *f*» et « *f* a pour primitive *F* ».

Exemple :

 est une primitive de car pour tout réel *x*.

 2) Primitives des fonctions usuelles

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Une primitive | Intervalle |
| ,  |  |  |
|  |  |  pour  ou pour  |
|   |   |  ou  |
|   |   |  |
|   |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

 3) Linéarité des primitives

Propriété : *f* et *g* sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Si *F* est une primitive de *f* et *G* est une primitive de *g* sur I alors :

- *F* + *G* est une primitive de *f* + *g*,

- *kF* est une primitive de *kf* avec *k* réel.

Démonstrations :

-

-

 4) Opérations et fonctions composées

 est une fonction dérivable sur un intervalle I.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Une primitive | Conditions |
|  |  | Si  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Méthode : Recherche de primitives

 **Vidéo** [**https://youtu.be/GA6jMgLd\_Cw**](https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/82HYI4xuClw**](https://youtu.be/82HYI4xuClw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ**](https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iiq6eUQee9g**](https://youtu.be/iiq6eUQee9g)

Dans chaque cas, déterminer une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle I.

a) sur b) sur

c) surd) sur

e) sur f) sur

a)

b) donc

c) du type

avec

Une primitive de est de la forme

Soit :

d) du type avec

Une primitive de est de la forme

Soit :

e) du type avec

Une primitive de est de la forme .

Soit :

f)

Donc

Propriété : Deux primitives d’une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d’une constante.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/oloWk2F4bI8**](https://youtu.be/oloWk2F4bI8)

Soit et deux primitives de la fonction sur I.
Alors : et .
Donc : , soit , soit encore .
La fonction possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme cette constante. Ainsi : pour tout de I.

On en déduit que les deux primitives de diffèrent d’une constante.

Propriété : *f* est une fonction continue sur un intervalle I.

Si est une primitive de *f* sur I alors pour tout réel, la fonction est une primitive de *f* sur I.

Démonstration :

est une primitive de .

On pose .

.

Donc est une primitive de .

Exemple :

 est une primitive de .

Donc, toute fonction de la forme , avec , est une primitive de .

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

*- Démontrée dans le chapitre Intégration -*

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d’une primitive particulière

 **Vidéo** **https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI**

Soit la fonction définie sur ℝ\* par .

1) Démontrer que la fonction définie sur ℝ\* par est une primitive de *.*

2) Déterminer la primitive de la fonction qui s’annule en .

1) La fonction est une primitive de si *.*

 .

2) Toutes les primitives de sont de la forme : où est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction qui s’annule en , soit :

Donc :

Soit :

La primitive de la fonction qui s’annule en est telle que :

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l’équation de la courbe pour calculer l’aire sous la courbe, c’est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l’idée qu’une personne s’intègre à un groupe.



II. Intégrale et aire

1. Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm2 par exemple).

 2) Définition

Définition : Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle .

On appelle **intégrale** de *f* sur l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la

fonction *f*, l'axe des abscisses et les

droites d'équations et .

3) Notation

L'intégrale de la fonction sur se note :

Et on lit « intégrale de à de ».



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme **s**omme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

- et sont appelés les bornes d'intégration.

- est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : .

"" ou "" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction définie par , l'axe des abscisses et les droites d'équations et est l'intégrale de la fonction sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note .



Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'aire cherchée.



Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/jkxNKkmEXZA**](https://youtu.be/jkxNKkmEXZA)

a) Tracer la représentation graphique de la fonction définie par dans un repère orthonormé.

b) Calculer .

a)



b) Calculer revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations et .

Donc par dénombrement, on obtient :

 4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction *f* continue, positive et monotone sur un intervalle .

On partage l'intervalle en *n* sous-intervalles de même amplitude .

Sur un sous-intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

* l'un de dimension *l* et qui a pour aire *l* x;
* l'autre de dimension *l* et qui a pour aire *l* x.

Sur l'intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des *n* rectangles "inférieurs" et la somme des *n* rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.



|  |
| --- |
| **Langage naturel** |
| Définir fonction rectangle(a, b, n)L ← (b-a)/n*x* ← am ← 0p ← 0Pour i allant de 0 à n-1 m ← m+Lxf(*x*) *x* ← *x*+L p ← p+Lxf(*x*)FinPourAfficher m et p |

Exemple :

Avec Python, on programme l'algorithme pour la fonction .

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.



On vérifie avec un logiciel de calcul formel :



**Calculer une intégrale avec la calculatrice :**

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/0Y3VT73yvVY**](https://youtu.be/0Y3VT73yvVY)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/hHxmizmbY\_k**](https://youtu.be/hHxmizmbY_k)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo**](https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo)

 5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition : Soit *f* une fonction continue sur un intervalle .

On appelle **intégrale** de *f* sur le nombre  défini par :

- si est positive sur  :

- si est négative sur  : ,

où est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations et .



Exemple :

 6) Propriétés

Propriétés : Soit une fonction continue sur un intervalle I et ,, des réels de I.



Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

La courbe représentative de la fonction cube est en effet symétrique par rapport à l’origine du repère, donc :

III. Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit une fonction continue sur un intervalle .

La fonction définie sur par est la primitive de qui s’annule en .



Démonstration dans le cas où est strictement croissante :

- 1er cas :

On considère deux réels et de l'intervalle .

On veut démontrer que : .



On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction *f* (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, et

.

Comme est croissante sur , on a :

Puisque , on a :

Comme est continue sur , .

D'après le théorème des gendarmes, .

Et donc :

 est donc une primitive de .

Par ailleurs, s’annule en car

- 2e cas :

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6DHXw5TRzN4**](https://youtu.be/6DHXw5TRzN4)

Soit la fonction définie sur [0 ; 10] par : .

a) Étudier les variations de *.*

b) Tracer sa courbe représentative.

a) est continue et positive sur [0 ; 10] donc est dérivable sur [0 ; 10] et .

Donc est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 10 |
|  | + |
|  |  250 |

 est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi



b) Pour tout de [0 ; 10], on a

On a ainsi la représentation graphique de :



 2) Calcul d’intégrales

Propriété : Soit une fonction continue sur un intervalle .

Si est une primitive de alors .

Démonstration :

La fonction définie sur par est une primitive de sur d’après le premier théorème du paragraphe II.

Si est une primitive de alors pour tout de [*a* ; *b*], on a : .

En effet, deux primitives d’une même fonction diffèrent d’une constante.

De plus, et donc et donc :

 .

Or .

Définition : Soit une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels de I et une primitive de sur .

On appelle **intégrale** de sur la différence .

Notation :

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw**](https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8ci1RrNH1L0**](https://youtu.be/8ci1RrNH1L0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/uVMRZSmYcQE**](https://youtu.be/uVMRZSmYcQE)

Calculer les intégrales suivantes :

On note :

Une primitive de est tel que :

Donc :

On note :

Une primitive de est tel que :

Donc :

 3) Propriété de linéarité

Propriété : Soit et deux fonctions continues sur un intervalle I ; et deux réels

de I.

a) Pour réel,

b)

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

 - est une primitive de

 - est une primitive de

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/B9n\_AArwjKw**](https://youtu.be/B9n_AArwjKw)

On pose : et

a) Calculer et .

b) En déduire et .

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

b) On a ainsi :

 donc soit :

 4) Inégalités

Propriétés : Soit et deux fonctions continues sur un intervalle I ; *b* deux réels de I avec .

a) Si, pour tout de , , alors

b) Si, pour tout de , , alors

Démonstration :

a) Par définition, lorsque est positive, l'intégrale de est une aire donc est positive.

b) Si alors .

Donc en appliquant a), on a : .

Par linéarité, on a et donc .

Méthode : Encadrer une intégrale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VK0PvzWBIso**](https://youtu.be/VK0PvzWBIso)

a) Démontrer que pour tout de [0 ; 1], on a : .

b) En déduire que : .

a) Sur [0 ; 1], .

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur , on a : .

b) On déduit de la question précédente que :

D'où : .

IV. Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

 **Vidéo** [**https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ**](https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ)

On considère les fonctions et définies par et .

On admet que pour tout de , on a

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de et de sur l'intervalle .



On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de et de l'aire sous la courbe représentative de .

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

Donc :

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l’intégrale.

V. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit une fonction continue sur un intervalle avec .

On appelle **valeur moyenne** de sur le nombre réel :

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation (en bleu), entre a et b.



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction définie par sur l'intervalle [1 ; 10].

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/oVFHojz5y50**](https://youtu.be/oVFHojz5y50)

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au *x*-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à .

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



VI. Intégration par parties

Théorème : Soit et deux fonctions dérivables sur . Alors, on a :

Démonstration :

 est dérivable sur et on a :

Les fonctions , et sont continues sur , donc :

D’où :

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

 **Vidéo** **https://youtu.be/uNIpYeaNfsg**

 **Vidéo** **https://youtu.be/vNQeSEb2mj8**

 **Vidéo** **https://youtu.be/xbb3vnzF3EA**

Calculer les intégrales suivantes :

 ➽ *Ce choix n’est pas anodin ! L’idée est ici de ne plus laisser de*

 *facteur dans l’expression qu’il restera à intégrer*. Il faudrait

 donc dériver

On pose :

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

On pose :

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

Or, dans le terme de droite, on reconnait l’intégrale de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s’agit ici d’une **double intégration par parties**.

On a donc :

On pose :

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

VII. Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d’intégrales

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8I0jA4lClKM**](https://youtu.be/8I0jA4lClKM)

On considère la suite d’intégrales définie pour tout entier , par :

1) Calculer .

2) A l’aide d’une intégration par parties, démontrer que :

3) A l’aide d’un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite

1. Pour , on a :

2) L’objectif est d’exprimer en fonction de

On pose :

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

Donc :

3)

On conjecture que :

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)