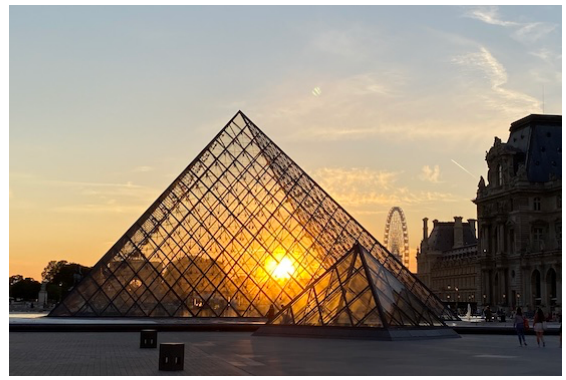
PYRAMIDE ET CÔNE

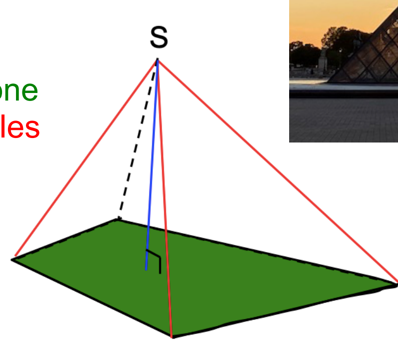
I. La pyramide

1) Vocabulaire

Définition :
Une **pyramide** est un solide formé d'un polygone « surmonté » d'un sommet.

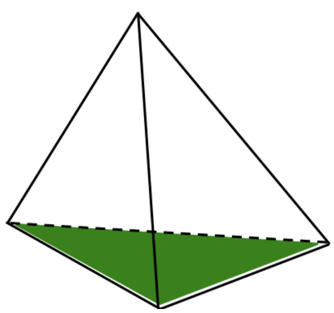

Pyramide du Louvre - Paris

S : le sommet
En vert : la base, un polygone
En rouge : les arêtes latérales
En bleu : la hauteur

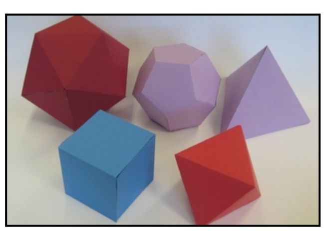


2) Une pyramide particulière : le tétraèdre

Vient du grec *tetra* (= 4) et *edros* (= base)



Euclide a prouvé qu'il existe seulement 5 polyèdres réguliers (toutes les faces sont des polygones réguliers) : l'icosaèdre, le dodécaèdre, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre. Ce sont les polyèdres de Platon qui symbolisaient selon lui : l'Eau, l'Univers, le Feu, la Terre et l'Air.

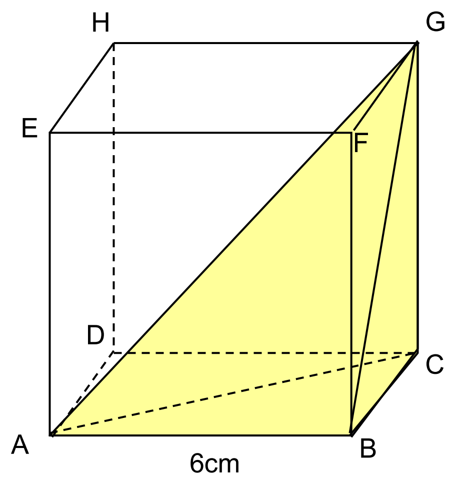


3) Patron

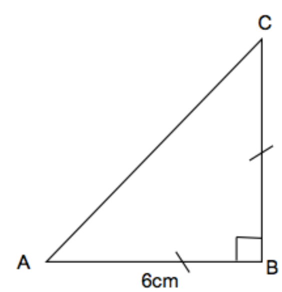
Méthode : Construire un patron d'une pyramide

Vidéo https://youtu.be/GXkxA__A44A

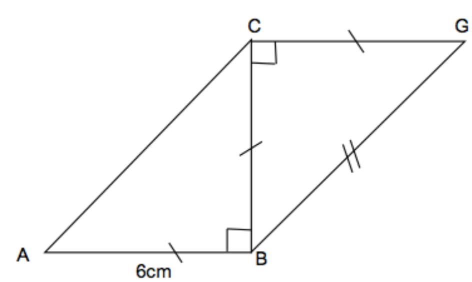
Construire le patron de la pyramide GABC inscrite dans le cube ABCDEFGH.

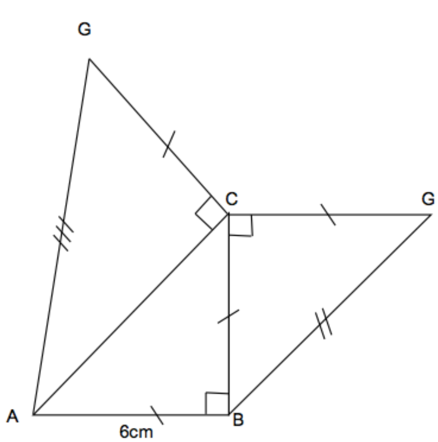


On commence par tracer par exemple la base de la pyramide :
le triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que AB = BC = 6 cm.



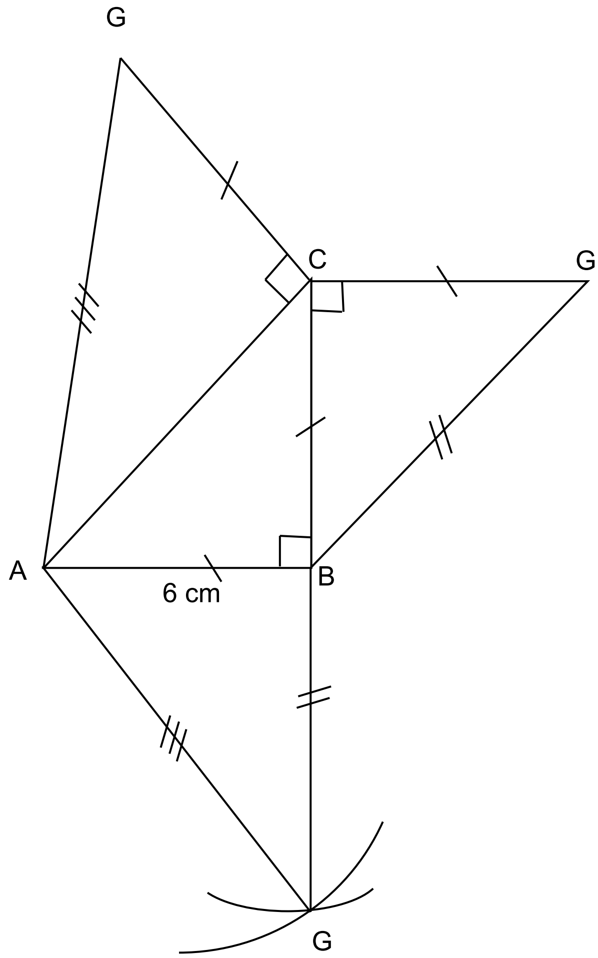
On trace ensuite la face de droite :
le triangle BCG rectangle et isocèle en C tel que CG = 6 cm.





On trace ensuite la face arrière :
le triangle ACG rectangle en C tel que CG = 6 cm.

On finit en traçant la face de devant : le triangle ABG. Pour cela, on reporte au compas les longueurs AG et BG déjà construites sur les autres triangles.



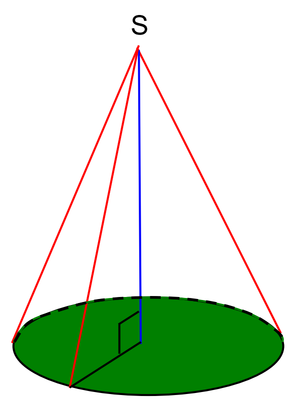
II. Le cône de révolution

1) Vocabulaire

Définition :
Un **cône** (ou cône de révolution) est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

En grec « kônos » signifiait une pomme de pin

S : le sommet
En vert : la base, un disque
En rouge : les génératrices
En bleu : la hauteur

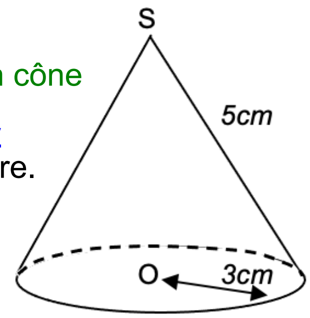


2) Patron :

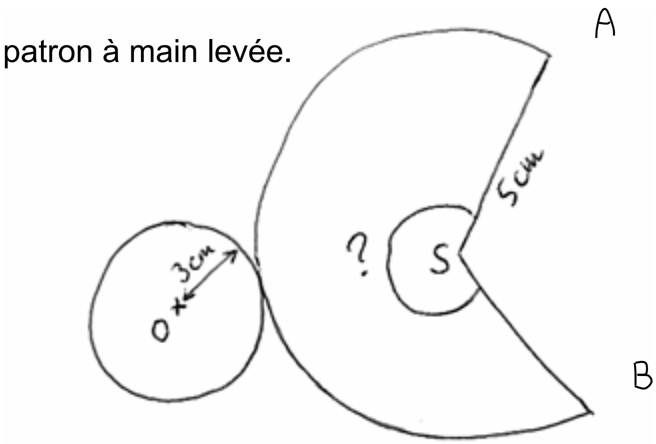
Méthode : Construire un patron d'un cône

Vidéo https://youtu.be/hepr9p3Svbw

Construire le patron du cône ci-contre.



On commence par faire un patron à main levée.



- Périmètre de la base = $2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$

Or, le périmètre de la base est égal au périmètre de l'arc AB car ils se touchent.

Donc :

Périmètre de l'arc $AB = 6\pi$

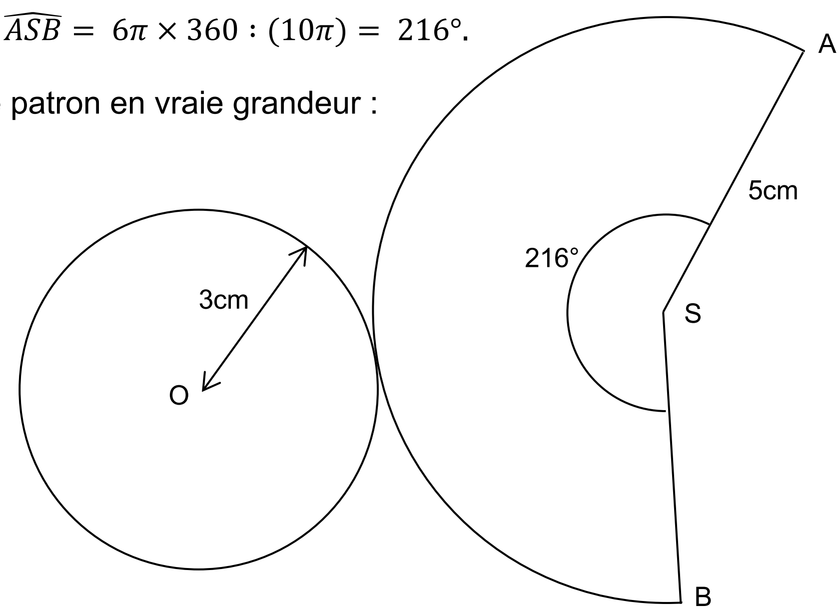
- Périmètre du disque de centre S et de rayon 5 cm = $2 \times \pi \times 5 = 10\pi$.

Dans un cercle, la longueur de l'arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui le définit.

Angle au centre	360	$\widehat{ASB}$
Longueur de l'arc	10π	6π

$\widehat{ASB} = 6\pi \times 360 : (10\pi) = 216°$.

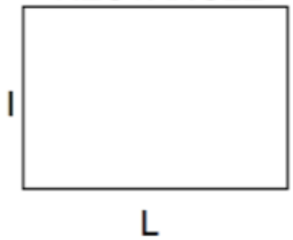
On construit ainsi le patron en vraie grandeur :



III. Volumes

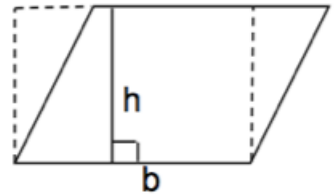
1) Rappels : formules d'aires

RECTANGLE



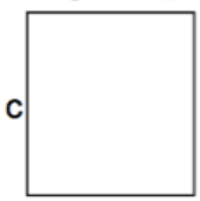
$\mathcal{A} = L \times l$

PARALLELOGRAMME



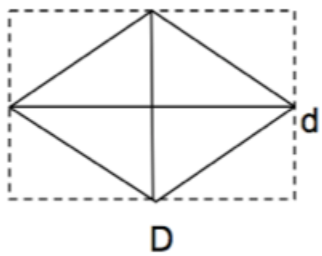
$\mathcal{A} = b \times h$

CARRE



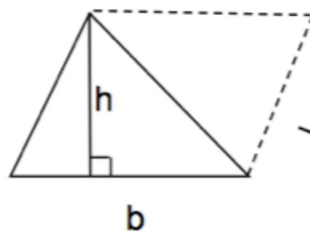
$\mathcal{A} = c \times c$
$= c^2$

LOSANGE



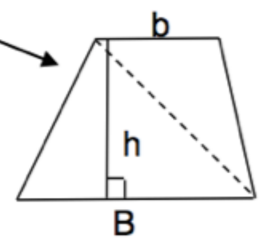
$\mathcal{A} = \dfrac{D \times d}{2}$

TRIANGLE



$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

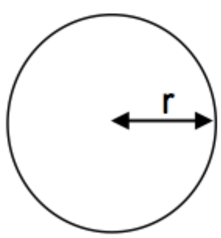
TRAPEZE



$\mathcal{A} = \dfrac{B \times h}{2} + \dfrac{b \times h}{2}$

$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \times h}{2}$

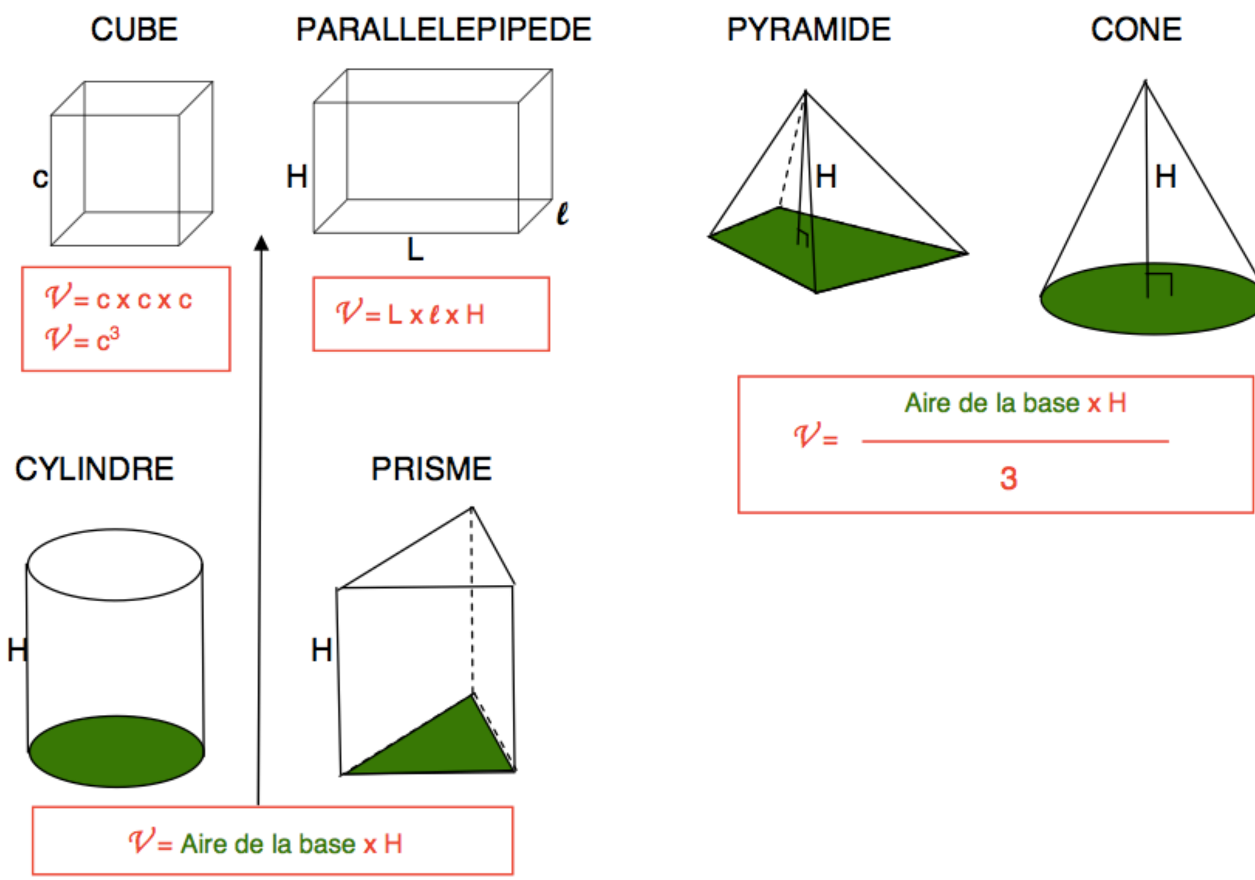
DISQUE



$\mathcal{A} = \pi r^2$

(circonférence $= 2\pi r$)

2) Formules de volumes

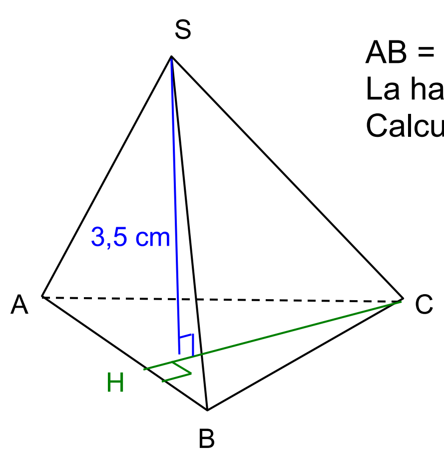


Un premier exemple simple :

Vidéo https://youtu.be/RzlJ5Fq2fiU

Méthode : Calculer le volume d'une pyramide

Vidéo https://youtu.be/KKon_clVd9k



AB = 4 cm et CH = 5 cm.
La hauteur de la pyramide est de 3,5 cm
Calculer son volume arrondi au centième de cm^3.

Calcul de l'aire de la base :
La base est un triangle de hauteur CH = 5 cm.

$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10\ cm^2$

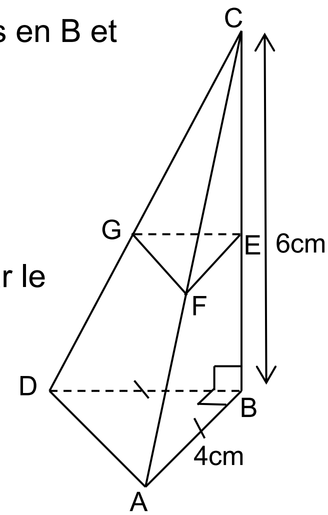
Calcul du volume de la pyramide :
La pyramide a pour hauteur $H = 3,5$ cm.
$V = \frac{A \times H}{3} = \frac{10 \times 3,5}{3} = \frac{35}{3}\ cm^3 \approx 11,67\ cm^3$

Calcul du volume d'un cône :

Vidéo https://youtu.be/kMssaNRPXz8

IV. Agrandissement et réduction

1) Exemple d'introduction : Une pyramide réduite



Les faces CBA et CBD de la pyramide sont des triangles rectangles en B et la base DBA est un triangle rectangle et isocèle en B.
CB = 6 cm et AB = 4 cm.

1) Calculer :
- L'aire du triangle DBA ;
- Le volume de la pyramide CDAB.

2) On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point E tel que CE = 3 cm.
La pyramide CGFE est une réduction de la pyramide CDAB.
Calculer :
- Le coefficient de réduction ;
- L'aire du triangle GEF ;
- Le volume de la pyramide CGFE.

1) • A_{DBA} = B x h : 2 = 4 x 4 : 2 = 8 cm^2
• $V_{CABD} = A_{DBA}$ x H : 3 = 8 x 6 : 3 = 16 cm^3

2) • $\frac{CE}{CB} = \frac{3}{6} = 0,5$

0,5 est le coefficient de réduction. → Les longueurs sont multipliées par 0,5.

• (EF = GE= 0,5 x 4 = 2 cm)
A_{GEF} = B x h : 2 = 2 x 2 : 2 = 2 cm^2
Compléter : A_{GEF} = ? x A_{DBA}
2 = ? x 8
? = 2 : 8 = 0,25 (= $0,5^2$)

$A_{GEF} = 0,5^2 \times A_{DBA}$ → Les aires sont multipliées par $0,5^2$.

• V_{CEFG} = A_{GEF} x H : 3 = 2 x 3 : 3 = 2 cm^3

Compléter : V_{CEFG} = ? x V_{CABD}

2 = ? x 16

? = 2 : 16 = 0,125 (= 0,5^3)

V_{CEFG} = 0,5^3 x V_{CABD} → Les volumes sont multipliés par 0,5^3.

2) Propriétés

Propriétés :
Pour un agrandissement ou une réduction de rapport *k*,
-les longueurs sont multipliées par *k*,
-les aires sont multipliées par k^2,
-les volumes sont multipliés par k^3.

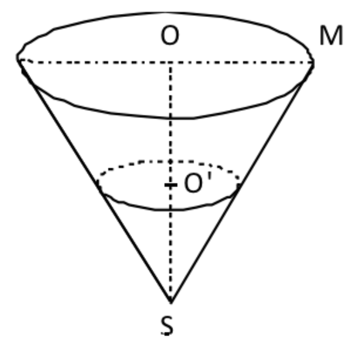
Remarque : Dans la pratique, on applique directement la propriété.

3) Application

Méthode : Appliquer un agrandissement ou une réduction

Vidéo https://youtu.be/YBwMKghrSOE

Le récipient représenté ci-contre a une forme conique et a pour dimensions : OM = 6 cm et SO = 12 cm.
1) Calculer, en cm^3, le volume de ce récipient.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième de cm^3.
2) On remplit d'eau le récipient jusqu'au point O' tel que SO' = 4,5 cm.
Le cône formé par l'eau est une réduction du cône initial.
Calculer le coefficient de réduction.
3) Déduire une valeur approchée du volume d'eau.



1) Aire de la base du récipient :
Il s'agit d'un disque de rayon OM = 6 cm, donc : $A = \pi R^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$

Volume du récipient :
Il s'agit d'un cône de hauteur SO = 12 cm, donc :

$$V = \frac{Aire\ base\ \times\ H}{3} = \frac{36\pi \times 12}{3} = 144\pi\ cm^3 = \ 452{,}4\ cm^3$$

2) Coefficient de réduction :
Le coefficient de réduction est le rapport de deux longueurs qui se correspondent sur les deux solides. On prend ici les hauteurs SO et SO' des deux solides.

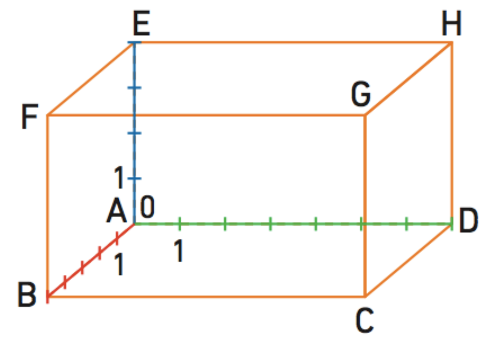
$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4{,}5}{12} = 0{,}375$$

3) Pour une réduction de rapport *k* =0,375, les volumes sont multipliés par k^3 =0,375^3.
Ainsi, le volume du petit cône correspondant à l'eau dans le récipient est égal à :
$V' = 452{,}4 \times 0{,}375^3 = 23{,}9\ cm^3$.

V. Repérage dans l'espace

1) Repère de l'espace

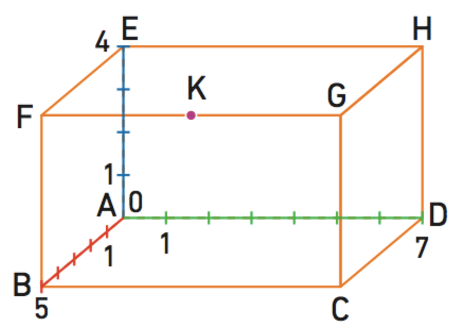
Un parallélépipède peut définir un repère de l'espace.
Il faut choisir une origine (ici le point A) et trois axes gradués définis à partir des dimensions du parallélépipède : abscisse – ordonnée – altitude



Méthode : Se repérer sur le parallélépipède rectangle

Vidéo https://youtu.be/OTUHNsf1Gek

On donne le repère de l'espace représenté ci-dessous défini à partir du parallélépipède ABCDEFGH.
Donner l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude des sommets du parallélépipède et du milieu K du segment [FG].



Pour chaque point, on note dans l'ordre entre parenthèses l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude.

A(0 ; 0 ; 0)	E(0 ; 0 ; 4)	K(3,5 ; 5 ; 4)
B(0 ; 5 ; 0)	F(0 ; 5 ; 4)	
C(7 ; 5 ; 0)	G(7 ; 5 ; 4)	
D(7 ; 0 ; 0)	H(7 ; 0 ; 4)	