

PROBABILITÉS

Partie 1 : Situations liées au hasard

1) Expérience aléatoire

Vocabulaire :

- On lance un dé et on regarde la face du dessus lorsque le dé s'arrête de rouler. Il s'agit d'une **expérience aléatoire** car le résultat de cette expérience n'est pas prévisible.
- L'expérience a 6 résultats possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6. On les appelle les **issues** de l'expérience.

Méthode : Étudier une situation liée au hasard

 Vidéo <https://youtu.be/6EtRH4udcKY>

Sur un jeu de 13 cartes indiscernables, Léo écrit sur chaque carte une lettre du mot « mathématiques ».

M A T H E M A T I Q U E S

Ensuite Léo retourne toutes les cartes et demande à son ami Théo d'en choisir une au hasard.

- Est-ce une expérience aléatoire ?
- Quelle(s) lettre(s) a-t-il le plus de chance d'obtenir ?
- Théo pense qu'il a plus de chance d'obtenir une consonne qu'une voyelle. A-t-il raison ?
- Théo affirme qu'il a plus d'une chance sur deux de tirer une lettre appartenant à son prénom. A-t-il raison ?

Correction

- Cette expérience est aléatoire, car le résultat n'est pas prévisible.
- Les lettres M, A, T, E apparaissent deux fois. Ce sont ces 4 lettres qu'il a le plus de chance d'obtenir.
- On compte 7 consonnes : 2M, 2T, H, Q, S et 6 voyelles : 2A, 2E, I, U. Il a raison de penser qu'il a plus de chance d'obtenir une consonne qu'une voyelle.
- Le jeu contient 5 lettres appartenant à son prénom : 2T, H, 2E. Il a donc 5 chances sur 13 d'obtenir une de ces lettres. 5 est inférieur à la moitié de 13, il a donc moins d'une chance sur deux de tirer une lettre appartenant à son prénom. Théo a donc tort.

2) Calcul élémentaire de probabilité

Vocabulaire :

- Si on lance un dé à 6 faces.
- « On obtient un nombre supérieur ou égal à 5 » est appelé un **événement**.

Cet événement est constitué des issues : « 5 » et « 6 ».

• Calculer la chance qu'un événement de se produire est appelée la **probabilité**.

On l'exprime sous la forme d'une fraction ou en %.

Méthode : Effectuer un calcul de probabilité élémentaire

 Vidéo <https://youtu.be/a9Mb5v7Z4Mw>

Calculer les probabilités des événements suivants :

- Obtenir le nombre 2 en lançant un dé à 6 faces.
- Obtenir une boule verte en piochant au hasard une boule dans une urne contenant 3 boules vertes et 4 boules jaunes.
- La roue ci-contre s'arrête sur un secteur jaune.



Correction

a) Cet événement possède 1 issue possible (le « 2 ») sur 6 issues en tout. Il a donc 1 chance sur 6 de se réaliser.

La probabilité d'obtenir le nombre 2 en lançant un dé à 6 faces est donc égale à $\frac{1}{6}$.

b) Cet événement possède 3 issues possibles (3 boules vertes) sur 7 issues en tout (3+4=7 boules). Il a donc 3 chances sur 7 de se réaliser.

La probabilité d'obtenir une boule verte est donc égale à $\frac{3}{7}$.

c) Cet événement possède 2 issues possibles (2 secteurs jaunes) sur 14 issues en tout (14 secteurs). Il a donc 2 chances sur 14 de se réaliser.

La probabilité d'obtenir un secteur jaune est donc égale à $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

3) Évènement impossible, évènement certain

- Un évènement dont la probabilité est égale à 0 est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.

Partie 2 : Notion de probabilité

1) Exemple

 Vidéo <https://youtu.be/ithQHSY9Z-E>

Dans un groupe, chaque personne lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats du groupe de personnes dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2 700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.

Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, ... ou un 6.

En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente vers une valeur théorique.

Cette valeur, égale à $\frac{1}{6} \approx 0,167$, s'appelle la **probabilité** d'obtenir un 1, un 2, ... ou un 6.

2) Définition

Exemple :

Dire que la probabilité d'un évènement est de $\frac{8}{10} = 0,8$ signifie que cet évènement a 8 chances sur 10 ou 80 % de chance de se produire.

La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance qu'a un évènement de se produire ».

Remarques :

- Un évènement dont la probabilité est égale à 0 est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.
- Lorsque chaque issue a autant de chance de se produire, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

3) Calcul de probabilité

Propriété : La probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à A}}{\text{Nombre d'issues total}}$$

Remarque : Pour que cette propriété soit vraie, chaque issue doit avoir autant de chance de se produire (équiprobabilité).

4) Évènement contraire

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Alors l'événement contraire de E est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet événement est noté \bar{E} .

Définition : L'événement contraire de A , noté \bar{A} , est l'ensemble de toutes les issues de n'appartenant pas à A .

Propriété : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

On lance un dé à 6 faces et on regarde la face du dessus.

On pose : $A =$ « On obtient un 1 » et donc $\bar{A} =$ « On obtient un 2, 3, 4, 5 ou 6. »

Les événements A et \bar{A} sont contraires :

Méthode : Calculer une probabilité



Vidéo <https://youtu.be/d6Co0q01QH0>

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre inscrit sur la face du dessus.

Soit E l'événement : « La face du dessus est un nombre supérieur ou égal à 3 ».

1) Quelle est la probabilité de l'événement E ?

2) Calculer la probabilité de \bar{E} . Donner une interprétation du résultat.

Correction

1) - Le nombre d'issues favorables à E est égal à 4.

En effet, pour avoir un nombre supérieur ou égal à 3, il faut obtenir un 3, un 4, un 5 ou un 6.

- Le nombre d'issues total est égal à 6.

En effet, le dé a 6 faces.

- Ainsi d'après la formule : $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

La probabilité de l'événement E est égale à $\frac{2}{3}$.

Il y a donc deux chances sur trois d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.

2) $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

La probabilité de l'événement \bar{E} est égale à $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 2.

Méthode : Calculer une probabilité

 Vidéo <https://youtu.be/d6Co0q01QH0>

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre inscrit sur la face du dessus.

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un nombre supérieur ou égal à 3 ».

Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

Correction

- Nombre d'issues favorables à $E = 4$

En effet, pour avoir un nombre supérieur ou égal à 3, il faut obtenir un 3, un 4, un 5 ou un 6.

- Nombre d'issues total = 6

En effet, le dé à 6 faces.

$$\text{Ainsi } P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{2}{3}$.

Il y a donc deux chances sur trois d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.

5) Cas de non équiprobabilité

Méthode : Calculer une probabilité dans le cas de non équiprobabilité

 Vidéo <https://youtu.be/D00GFy0Rx6U>

Léo a reçu pour Noël la *boîte du magicien* avec du matériel lui permettant de faire des tours de magie.

Dans cette boîte, il trouve un dé à 6 faces qui est **pipé**. Il s'agit d'un dé mal équilibré dont les chances de tomber sur une face ne sont pas les mêmes que de tomber sur une autre.

Chaque issue n'a pas la même probabilité : on dit qu'il n'y a pas équiprobabilité.

La notice lui précise qu'il a deux fois plus de chance de tomber sur un chiffre impair que sur un chiffre pair.

Calculer la probabilité de tomber sur un chiffre pair.

Correction

On note p la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

Alors la probabilité d'obtenir un chiffre impair est égale $2p$.

En lançant un dé, on obtient soit un chiffre pair soit un chiffre impair, il n'y a pas d'autre issue.

Donc $p + 2p = 1$ (évènement certain).

$$\text{Soit } 3p = 1 \text{ ou encore } p = \frac{1}{3}.$$

La probabilité d'obtenir un chiffre pair est égale à $\frac{1}{3}$.

Partie 3 : Expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau à double entrée

▶ Vidéo <https://youtu.be/5DGQ-49xzgl>

Une urne contient une boule bleue et deux boules rouges. On tire deux fois de suite une boule de l'urne en la remettant dans l'urne après chaque tirage.

En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la probabilité de :

- Tirer successivement deux boules rouges,
- Tirer au moins une boule rouge.

Correction

On réalise un tableau à double entrée présentant en ligne et en colonne les issues possibles pour chaque tirage :

1er tirage \ 2e tirage	Bleue	Rouge	Rouge
Bleue	Bleue, Bleue	Bleue, Rouge	Bleue, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge

- a) On compte 4 issues favorables à l'événement « Tirer successivement deux boules rouges » et 9 issues en tout.

Donc la probabilité de tirer successivement deux boules rouges est égale à

$$\frac{4}{9}$$

1er tirage \ 2e tirage	Bleue	Rouge	Rouge
Bleue	Bleue, Bleue	Bleue, Rouge	Bleue, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge

- b) On compte 8 issues favorables à l'événement « Tirer au moins une boule rouge » et 9 issues en tout.

Donc la probabilité de tirer au moins une boule rouge est égale à $\frac{8}{9}$.

1er tirage \ 2e tirage	Bleue	Rouge	Rouge
Bleue	Bleue, Bleue	Bleue, Rouge	Bleue, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge
Rouge	Rouge, Bleue	Rouge, Rouge	Rouge, Rouge

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

 Vidéo <https://youtu.be/dQPd9njK5ZA>

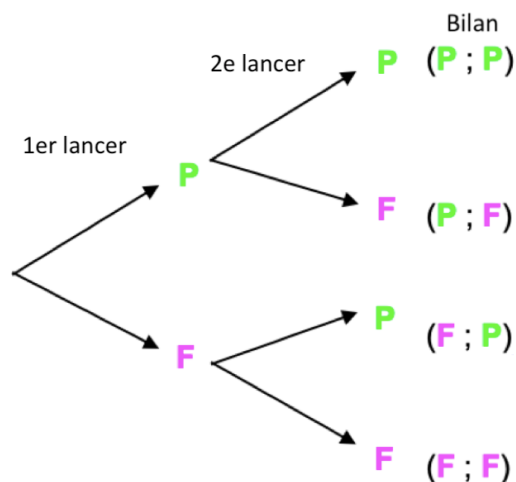
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit E l'événement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »
Calculer $P(E)$ en utilisant un arbre des possibles.

Correction

On construit un arbre des possibles présentant les résultats possibles aux deux épreuves de l'expérience.

Le 1^{er} niveau de l'arbre correspond les issues du 1^{er} lancer (1^{ère} épreuve).

Le 2^e niveau de l'arbre correspond les issues du 2^e lancer (2^e épreuve).



On compte 4 issues en tout : (P ; P), (P ; F), (F ; P) et (F ; F).

L'événement E possède 3 issues : (P ; P), (P ; F) et (F ; P).

La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Partie 4 : Loi de probabilité

Exemple :

Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules jaunes et 11 boules noires.

On tire une boule au hasard et on note sa couleur.

Le tableau suivant présente les probabilités de toutes les issues de l'expérience, on l'appelle **loi de probabilité**.

Issues	Boule verte	Boule jaune	Boule noire
Probabilités	$\frac{6}{20} = 0,3$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{11}{20} = 0,55$

Propriétés : La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Exemple : $P(\text{Boule verte}) + P(\text{Boule jaune}) + P(\text{Boule noire}) = 0,3 + 0,15 + 0,55 = 1$

Méthode : Utiliser une loi de probabilité



Vidéo <https://youtu.be/i24AGpzHviE>

On tire au hasard un jeton dans le sac contenant des jetons numérotés de 1 à 5.
Le tableau présente les probabilités de toutes les issues (loi de probabilité).

Issues	1	2	3	4	5
Probabilités	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$?	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

- Compléter le tableau de la loi de probabilité.
- Calculer la probabilité de l'évènement E : « Tirer un chiffre pair ».
- Décrire l'évènement \bar{E} puis calculer sa probabilité.

Correction

a)

Issues	1	2	3	4	5
Probabilités	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1, donc :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$$

$$\frac{1}{15} + \frac{4}{15} + P(3) + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = 1$$

$$P(3) + \frac{12}{15} = 1$$

$$P(3) = 1 - \frac{12}{15}$$

$$P(3) = \frac{15}{15} - \frac{12}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

b) L'évènement E possède deux issues : 2 et 4

Donc, d'après le tableau :

$$P(E) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

La probabilité de tirer un chiffre pair est égale à $\frac{7}{15}$.

c) \bar{E} est l'évènement : « Ne pas tirer un chiffre pair »

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{15}{15} - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

Partie 5 : Réunion et intersection de deux événements

1) Définitions

Exemples :

- a) On considère l'expérience aléatoire suivante :
 On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
 On considère les événements suivants :
 A : « On tire un valet »
 B : « On tire un cœur ou un carreau »

L'intersection des événements A et B est l'événement :
 « On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ». On note cet événement $A \cap B$ et on lit « A inter B »

La réunion des événements A et B est l'événement :
 « On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet événement $A \cup B$ et on lit « A union B »

- b) Soit les événements : $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{1 ; 3 ; 4\}$.
 Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

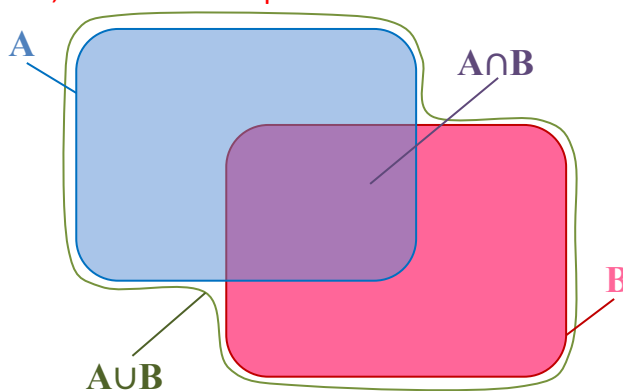
2) Probabilité d'une intersection :

▶ Vidéo <https://youtu.be/VprpP3e R-4>

Définitions :

L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.

L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



3) Probabilité d'une réunion

Théorème : Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Méthode : Calculer la probabilité d'une intersection

 **Vidéo** https://youtu.be/VprpP3e_R-4

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :

A : « Obtenir un multiple de 2 ».

B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 ».

- Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$.
- Déterminer les issues des événements : A , B et $A \cap B$.
- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Correction

a) $A \cap B$: « Obtenir un multiple de 2 inférieur ou égal à 4. »

b) On a : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Donc $A \cap B = \{2 ; 4\}$.

$$c) P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Méthode : Calculer la probabilité d'une réunion

 **Vidéo** https://youtu.be/y4P_BP-ldxk

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.
- Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$. Interpréter le résultat.

Correction

a) • On a : $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ et $B = \{3 ; 6\}$, donc :

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- On a : $A \cap B = \{3\}$, donc :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

b) L'évènement $A \cup B$ a donc pour probabilité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La probabilité d'obtenir un nombre impair ou un multiple de 3 est égale à $\frac{2}{3}$.

4) Événements incompatibles

Définition :

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété :

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.

On considère les événements suivants :

A : « On tire un valet »

B : « On tire un roi »

Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$.

On en déduit que la probabilité de l'évènement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau :

 **Vidéo** <https://youtu.be/aVXqUHx6ICA>

Partie 6 : Probabilités conditionnelles et tableaux

Définition :

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Remarque : On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

 Vidéo <https://youtu.be/7tS60nk6Z2I>

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »

G : « Le patient est guéri. »

Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri**.

b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.

Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il a pris le médicament B**.

Correction

1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :

$$P(A) = \frac{455}{800} \approx 0,57 = 57 \%$$

b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0,84 = 84 \%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à

$$P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0,48 = 48 \%$$

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à :

$$P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} = 0,09 = 9 \%$$

2) a)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri** se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0,57 = 57\%$. On regarde uniquement **la ligne des patients guéris**.

b)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il a pris le médicament B** se note $P_{\bar{A}}(G)$ et est égale à $P_{\bar{A}}(G) = \frac{291}{345} \approx 0,84 = 84\%$. On regarde uniquement **la colonne du médicament B**.

Propriété : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule

 Vidéo <https://youtu.be/SWmkdKxXf> |

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement : « Le résultat est un pique ».

Soit B l'événement : « Le résultat est un roi ».

Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Correction

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Remarque : On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

Partie 7 : Arbre pondéré et probabilités totales

1) Propriétés

Formules : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

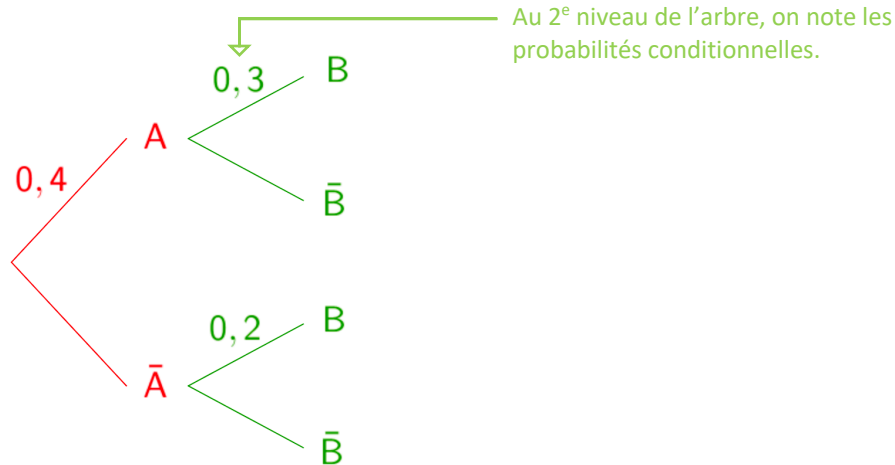
2) Construire un arbre pondéré

Exemple :

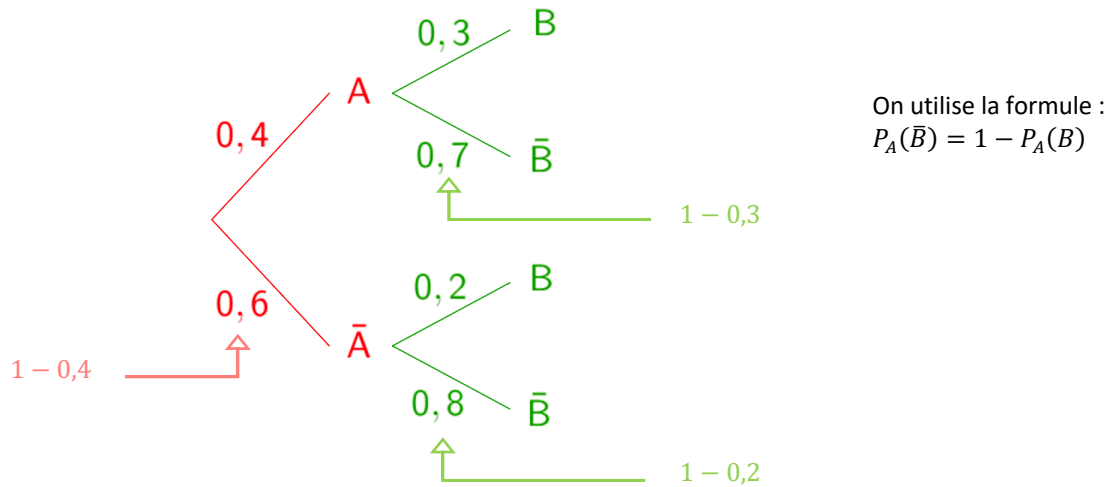
 Vidéo <https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo>

On donne : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$

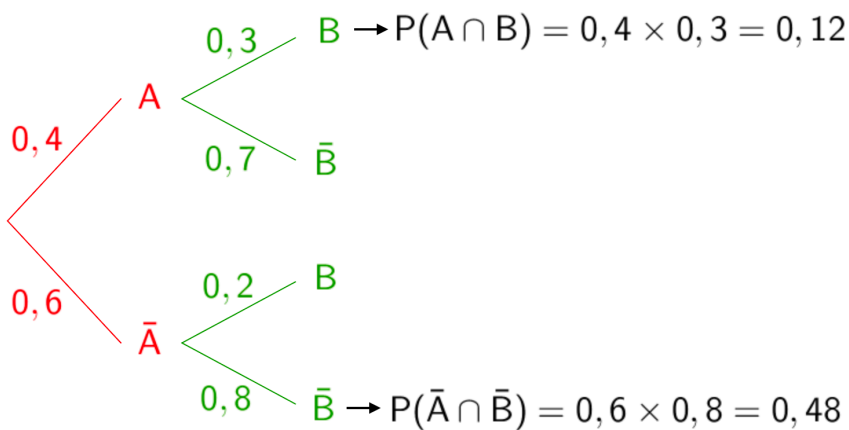
- On reporte ces probabilités dans l'arbre :



- On complète les probabilités manquantes :



- On calcule les probabilités d'intersections :



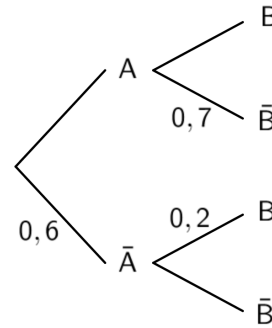
On utilise la formule :
 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Méthode : Construire un arbre pondéré

► Vidéo <https://youtu.be/o1HQ6xJ7o4U>

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

- a) Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.
b) À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$.



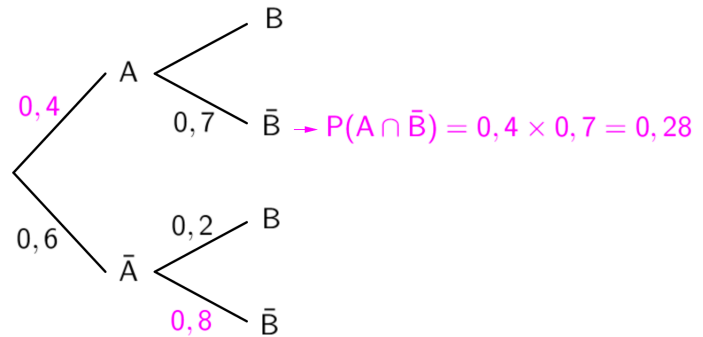
Correction

a) $P(\bar{A}) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

b) • $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$

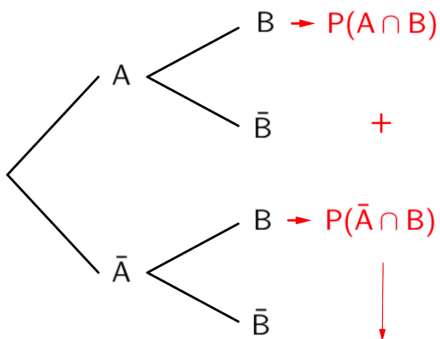
• $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,2 = 0,8$

• $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
 $= 0,4 \times 0,7 = 0,28$



3) Formule des probabilités totales

Propriété :



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

(Formule des probabilités totales)

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

► Vidéo <https://youtu.be/qTpTBoZA7zY>

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

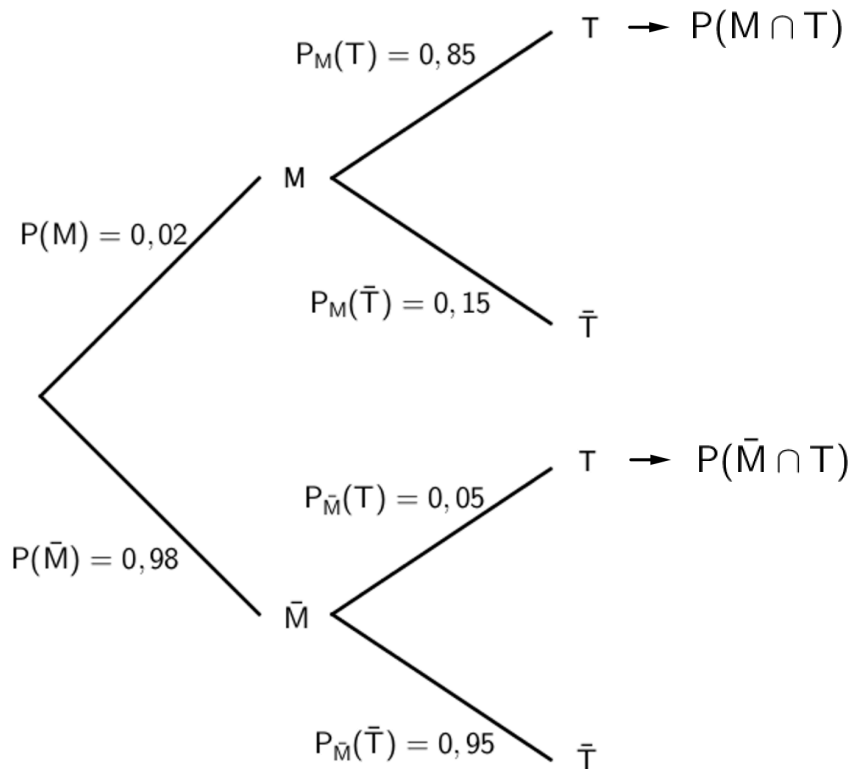
a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Correction

a) On construit et on complète un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ = 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6 %.

$$b) P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26 %.

Partie 8 : Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Méthode : Démontrer l'indépendance de deux événements

 Vidéo https://youtu.be/wdiMq_ITk1w

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement : « On tire un roi ».

Soit T l'événement : « On tire un trèfle ».

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Correction

a) On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$.

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

Et donc $P(R) \times P(T) = P(R \cap T)$

Les événements R et T sont donc indépendants.

b) On a : $P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, $P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{34}$

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289}$

Et donc $P(R) \times P(T) \neq P(R \cap T)$

Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements (1)

 Vidéo <https://youtu.be/SD9H5OYYLz0>

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit M l'événement : « L'individu a la maladie m ».

Soit N l'événement : « L'individu a la maladie n ».

On suppose que les événements M et N sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement E : « L'individu a au moins une des deux maladies ».

Correction

$$\begin{aligned} P(E) &= P(M \cup N) \\ &= P(M) + P(N) - P(M \cap N), \text{ d'après une formule vue en classe de 2}^{\text{nde}}. \\ &= P(M) + P(N) - P(M) \times P(N), \text{ car les événements } M \text{ et } N \text{ sont indépendants.} \\ &= 0,005 + 0,01 - 0,005 \times 0,01 \\ &= 0,01495 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 1,495 %.

Propriété : Si A et B sont indépendants alors \bar{A} et B sont indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements (2)

 Vidéo <https://youtu.be/yIvN6Dh-bDg>

Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.

Soit A l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6 ».

Soit B l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7 ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6.

Correction

On a : $P(A) = 0,42$ et $P(B) = 0,63$

La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 se note $P(\bar{A} \cap B)$.

Les événements A et B sont indépendants donc les événements \bar{A} et B sont également indépendants et on a :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - 0,42) \times 0,63 = 0,3654$$

La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à 36,54 %.

2) Succession de deux épreuves indépendantes

Exemples :

a) On lance un dé et on note le résultat. Puis on lance une pièce de monnaie et on note le résultat. Ces deux épreuves sont indépendantes.

b) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve 2 fois de suite.

Ces deux épreuves sont identiques et indépendantes.

Méthode : Calculer une probabilité sur une répétition d'expériences

 Vidéo <https://youtu.be/e7jH8a1cDtg>

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

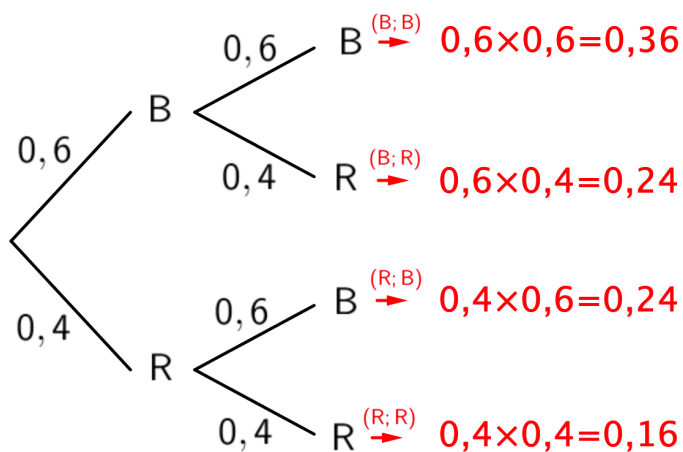
- Obtenir deux boules blanches.
- Obtenir une boule blanche et une boule rouge.
- Obtenir au moins une boule blanche.

Correction

1) On note B l'évènement « On tire une boule blanche » et R l'évènement « On tire une boule rouge ».

$$P(B) = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } P(R) = \frac{2}{5} = 0,4.$$

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré.



Comme R et B sont indépendants, on utilise la formule :

$$P(R \cap B) = P(R) \times P(B)$$

⚠ Dans ce contexte, au 2^e niveau de l'arbre, il ne s'agit pas de probabilité conditionnelle.

2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue $(B ; B)$. D'après l'arbre, on a :

$$P_1 = 0,36.$$

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues $(B ; R)$ et $(R ; B)$.

$$P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48.$$

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues $(B ; R)$, $(B ; B)$ et $(R ; B)$.

$$P_3 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84.$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales