VECTEURS ET DROITES

En 1837, le mathématicien italien *Giusto BELLAVITIS*, ci-contre, (1803 ; 1880) publie des travaux préfigurant la notion de vecteurs qu'il nomme "segments équipollents".
Puis plus tard au XIXe siècle, le mathématicien et physicien allemand *Hermann GRASSMANN* (1809 ; 1877) pose les bases des opérations sur les segments orientés pour les besoins de la mécanique : addition de forces, de vitesses... Le calcul vectoriel prend alors réellement son essor.

I. Colinéarité de deux vecteurs

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Critère de colinéarité :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration :

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

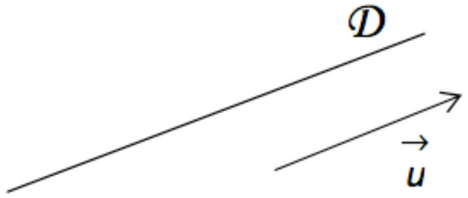
Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$ et donc $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple :
Vérifier si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
5 x 5 – (-4) x (-7) = -3 $\neq$ 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

II. Equations de droite

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



2) Equation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b\,;a)$.
Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite D.

Démonstration :
Soit A$(x_0\,;y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ un vecteur directeur de D.

Un point M(x ; y) appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_0\\y - y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit : $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$.

Soit encore : $\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$
Et donc : $\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$
Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(\alpha ; \beta) = (-b ; a)$.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M(x ; y) tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On considère un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point A(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-1 ; 5).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points B(5 ; 3) et C(1 ; -3).

1) Soit un point M(x ; y) de la droite *d*.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit : $5(x-3) - (-1)(y-1) = 0$.
Soit encore : $5x + y - 16 = 0$.
Une équation cartésienne de *d* est : $5x + y - 16 = 0$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à appliquer le premier théorème énoncé plus haut.
Ainsi, comme $\vec{u}$ (-1 ; 5) est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme : $5x + 1y + c = 0$.
Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de *d'*.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : $-6x+4y+c=0$.
B(5 ; 3) appartient à *d'* donc : -6 x 5 + 4 x 3 + c = 0 donc c = 18.
Une équation cartésienne de *d'* est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $3x-2y-9=0$.

Tracer une droite dans un repère :

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

3) Equation cartésienne et équation réduite

Si $b\neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

Le coefficient directeur de D est $-\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $-\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de D est $\left(1\,;-\frac{a}{b}\right)$.

Exemple :
Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x+y-6=0$.
Son équation réduite est $y=-4x+6$.

4) Parallélisme de droites

Propriété :
Les droites d'équation $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration :

Les droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si leur vecteur directeur respectif $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires soit :

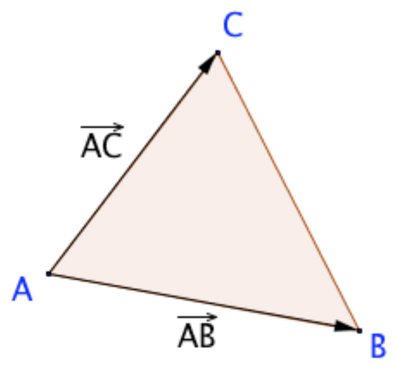
$-ba'-a(-b')=0$ soit encore : $ab'-a'b=0$.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU
Les droites d'équations $3x-y+5=0$ et $-6x+2y+7=0$ sont parallèles.
En effet, 3 x 2 – (-1) x (-6) = 0.

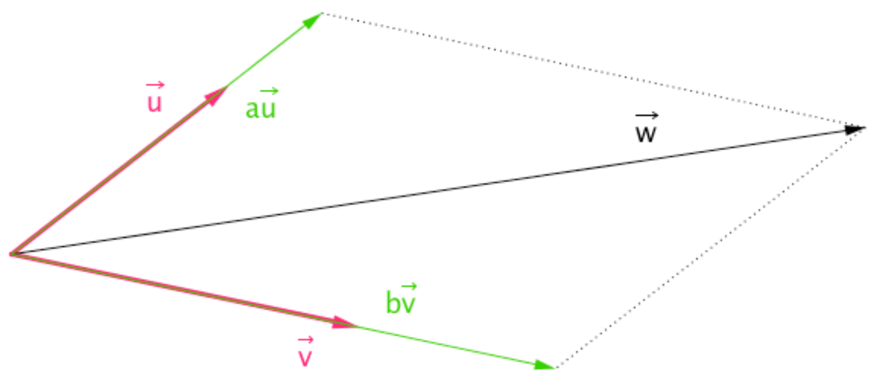
III. Décomposition d'un vecteur

Définition :
On appelle base du plan tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Exemples :
- Lorsqu'on considère un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ du plan, le couple de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, notée $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, est une base du plan.
- Lorsqu'on considère un triangle non aplati ABC, le couple $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ par exemple est une base du plan.



Propriété :
Soit $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ une base du plan.
Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un unique couple de nombres réels $(a\,;b)$ tel que :
$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.



- Admis -

Remarque :
La décomposition $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ signifie que le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ dans la base $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

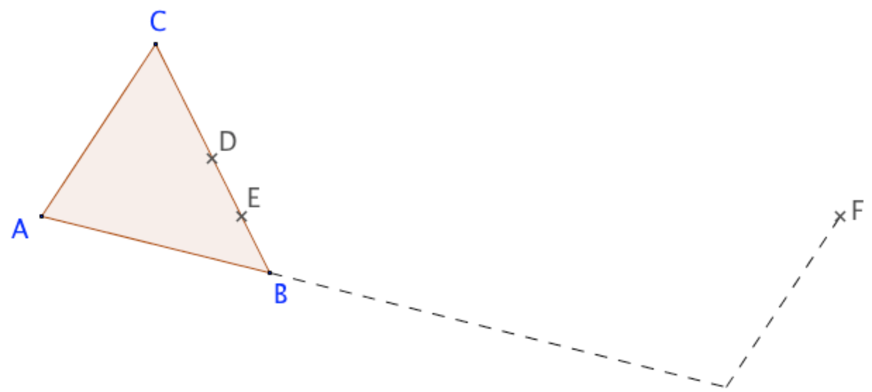
Méthode : Choisir une décomposition pertinente pour résoudre un problème

Vidéo https://youtu.be/4-dKOkNu_p4

Soit un triangle ABC. D est le milieu de [BC] et E est le milieu de [BD].

Le point F est défini par : $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les points A, E et F sont alignés.



Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est exprimé en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On va exprimer également le vecteur $\overrightarrow{AE}$ dans la base ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) et démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

D est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

E est le milieu de [BD] donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Donc :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

On a ainsi : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc les points A, E et F sont alignés.