

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME

13 POINTS

Dans tout le problème on travaille dans un réseau pointé à maille carrée.

On notera une unité de longueur 1 u.l. et une unité d'aire 1 u.a.

On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

L'objet de ce problème est le calcul d'aires de polygones de Pick.

A. Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Calculer l'aire du polygone ABCDEF (*figure 1*), en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.

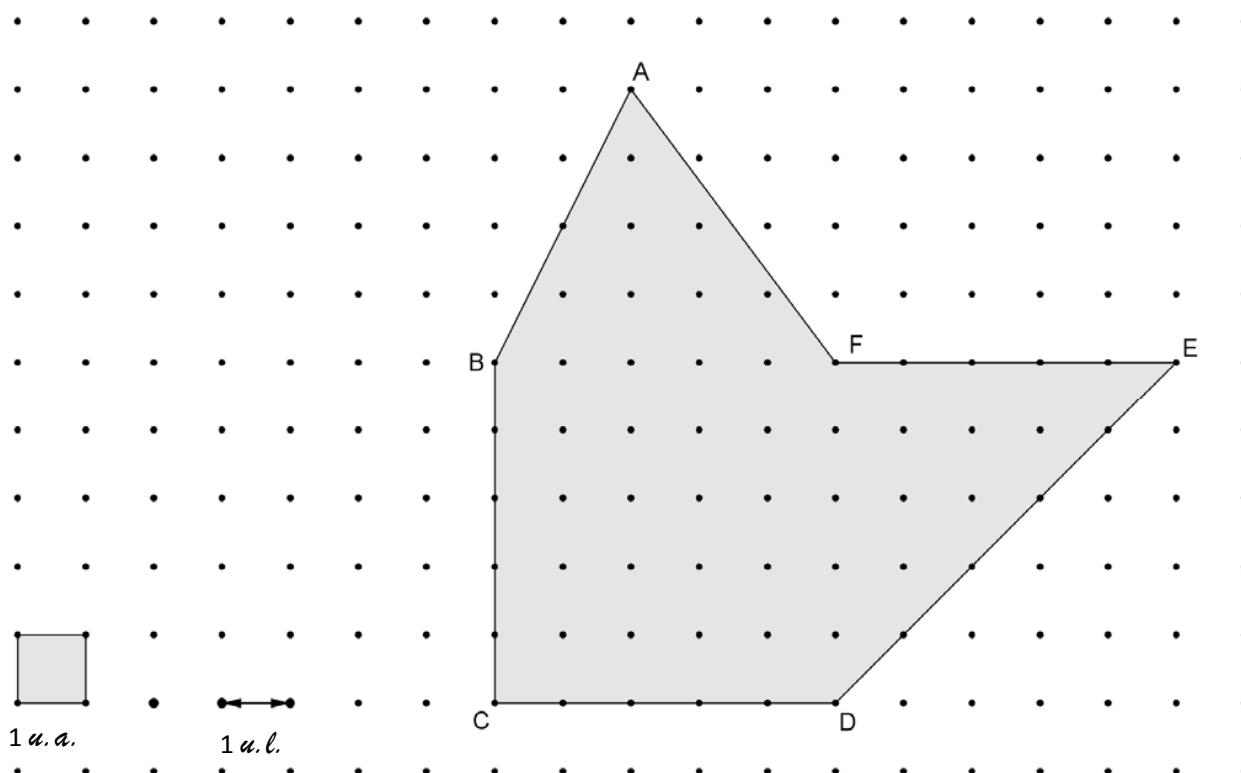


figure 1

Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire \mathcal{A} d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone :

$$\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$$

Le résultat est en unité d'aire avec 1 u.a = aire d'un carré unité.

Par exemple, pour le polygone ci-dessous :

$i = 15$ et $b = 16$, donc, en utilisant la formule, $\mathcal{A} = 15 + \frac{16}{2} - 1 = 22$.

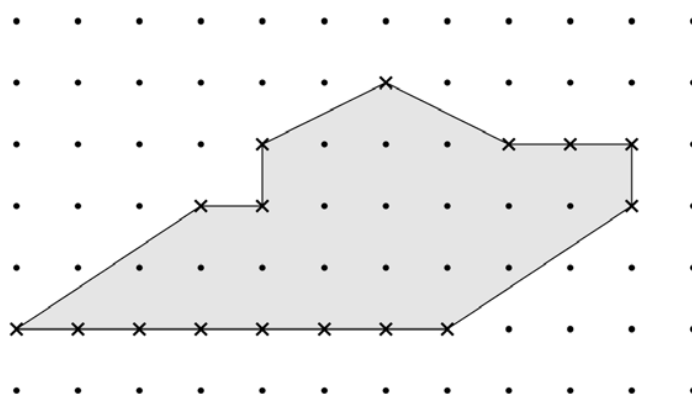


figure 2

B. Utilisation de la formule de Pick sur un exemple.

1. Appliquer cette formule au polygone ABCDEF de la *figure 1* et vérifier que l'on retrouve bien son aire.
2. **Propriété d'additivité des aires.**
Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick ABCDF et DEF de la *figure 1*. Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question **B.1**.

Les parties C. et D. sont indépendantes.

C. Quelques conséquences de la formule de Pick.

Dans cette partie du problème, on admet que la formule est vraie dans le cas général.

1. Prouver qu'il ne peut pas y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.
2. On considère un polygone de Pick d'aire 7,5. Démontrer que la valeur maximale que peut prendre b est 17.
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick correspondant à cette valeur.
3. On veut tracer un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur.
Quelle est alors la valeur de b ?
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions.

4. Démontrer que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire \mathcal{A} quelconque est : $2\mathcal{A} + 2$.

D. Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle.

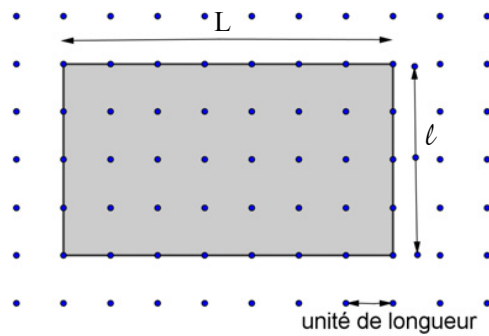
On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans l'exemple ci-dessous).

On note : L sa longueur

ℓ sa largeur

i le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle

b le nombre de points sur le bord du rectangle



1. Exprimer b et i en fonction de L et ℓ .
2. En déduire que l'aire \mathcal{A} du rectangle vérifie $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.