UNE SPIRALE TRÈS COMPLEXE

Commentaire : Etude d'une suite d'affixes dont les points forment une spirale.

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n tel que :

$$z_0 = 1 \ \ et \ \ z_{n+1} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_n.$$

1) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = |z_n|$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Indication : On pourra prouver que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OM_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier.

3) On considère l'algorithme ci-contre :

a) Si $P = 5$, quelle est la valeur affichée en sortie ?

b) Même question pour $P = 15$.

c) Dans le contexte de la partie 2, que permet de faire cet algorithme ?

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R < P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\sqrt{3}\,R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

4) Pour la suite, on admet que pour tout entier naturel n, on a : $z_n = u_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

a) Pour quelles valeurs de n, le point M_n appartient-il à l'axe des abscisses ? À l'axe des ordonnées ? Justifier.

b) Démontrer que le triangle OM_nM_{n+1} est isocèle en M_n.

c) Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, placer les points M_n pour $0 \leq n \leq 5$.
Prendre 0,5 cm pour une unité.
Relier dans l'ordre ces points pour obtenir la spirale.